

# ORBITES UNIPOTENTES ET PÔLES D'ORDRE MAXIMAL DE LA FONCTION $\mu$ DE HARISH-CHANDRA

VOLKER HEIERMANN

**ABSTRACT.** In a previous work, we have shown that a representation of a  $p$ -adic group obtained by (normalized) parabolic induction from an irreducible supercuspidal representation  $\sigma$  of a Levi subgroup  $M$  contains a subquotient which is square integrable, if and only if Harish-Chandra's  $\mu$ -function has a pole in  $\sigma$  of order equal to the parabolic rank of  $M$ . The aim of the present article is to interpret this result in terms of Langlands' functoriality principle.

**RÉSUMÉ:** Dans un travail antérieur, nous avons montré que l'induite parabolique (normalisée) d'une représentation irréductible cuspidale  $\sigma$  d'un sous-groupe de Levi  $M$  d'un groupe  $p$ -adique contient un sous-quotient de carré intégrable, si et seulement si la fonction  $\mu$  de Harish-Chandra a un pôle en  $\sigma$  d'ordre égal au rang parabolique de  $M$ . L'objet de cet article est d'interpréter ce résultat en termes de fonctorialité de Langlands.

Soit  $G$  le groupe des points rationnels d'un groupe réductif connexe défini sur un corps local non archimédien  $F$ . Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  et  $M$  un facteur de Levi de  $P$ . Notons  $i_P^G$  le foncteur d'induction parabolique normalisée. Soit  $\sigma$  une représentation irréductible cuspidale de  $M$ . Dans [H2], nous avons montré que la représentation  $i_P^G \sigma$  contient un sous-quotient de carré intégrable, si et seulement si  $\sigma$  est un pôle d'ordre  $\text{rg}_{ss}(G) - \text{rg}_{ss}(M)$  de la fonction  $\mu$  de Harish-Chandra (où  $\text{rg}_{ss}$  désigne le rang semi-simple déployé), et que la restriction de  $\sigma$  sur le centre de  $G$  est un caractère unitaire. Le but de cet article est de traduire ce résultat en termes de fonctorialité de Langlands.

Plus précisément, supposons que l'on dispose d'une correspondance de Langlands pour les représentations cuspidales des sous-groupes de Levi de  $G$ , vérifiant certaines propriétés supplémentaires: notons  $W_F$  le groupe de Weil de  $F$  et  ${}^L H$  le  $L$ -groupe d'un sous-groupe réductif  $H$  de  $G$ . On suppose donc en particulier que l'on sache associer à toute représentation cuspidale d'un sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$  un homomorphisme *admissible*  $W_F \times \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M$ . Cet homomorphisme doit par ailleurs être *discret*, ce qui signifie entre autres que son image n'est pas contenue dans un sous-groupe de Levi propre de  ${}^L M$ . Cet homomorphisme sera alors appelé le paramètre de Langlands de  $\sigma$ . (Le lecteur trouvera plus de précisions en 1.5.)

Typeset by  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

Si la restriction à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  du paramètre de Langlands de  $\sigma$  est triviale, nous supposons de plus la propriété suivante: soit  $M_\alpha$  un sous-groupe de Levi de  $G$  qui contient  $M$  et qui est minimal pour cette propriété. Notons  $M_\alpha^{der}$  le groupe dérivé de  $M_\alpha$ . Soit  $\chi$  un caractère non ramifié de  $M$ . Supposons que la restriction de  $\chi$  à  $M \cap M_\alpha^{der}$  ne soit pas un caractère unitaire, alors que celle au centre de  $M_\alpha$  le soit. Si la représentation induite  $i_{P \cap M_\alpha}^{M_\alpha}(\sigma \otimes \chi)$  est réductible, alors il est bien connu que cette représentation possède un unique sous-quotient de carré intégrable. On déduit du paramètre de Langlands pour  $\sigma$  naturellement un paramètre de Langlands pour ce sous-quotient. Notre hypothèse supplémentaire exige que ce paramètre de Langlands soit discret.

Si la restriction à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  du paramètre de Langlands de  $\sigma$  n'est pas triviale, la situation est plus compliquée. Nous avons en quelque sorte besoin que  $\sigma$  et son paramètre de Langlands ne se comportent pas seulement comme une représentation cuspidale, mais également comme une représentation de carré intégrable induite par une représentation cuspidale  $\sigma_0$  dont le paramètre de Langlands est la restriction à  $W_F$  du paramètre de Langlands de  $\sigma$  et que  $\sigma_0$  vérifie l'hypothèse ci-dessus.

En fait, on va déduire cette dernière hypothèse d'une propriété (conjecturale) de la correspondance de Langlands. En effet, dans la situation ci-dessus, il est supposé qu'il existe une forme intérieure  $G'$  de  $G$  telle que l'on puisse associer à  $\sigma$  par la fonctorialité de Langlands (le  $L$ -paquet d') une représentation de carré intégrable non cuspidale  $\sigma'$  d'un certain sous-groupe de Levi de  $G'$ . Il est alors attendu que  $\sigma'$  soit le sous-quotient d'une représentation induite par une représentation cuspidale  $\sigma'_0$  dont le paramètre de Langlands est la restriction à  $W_F$  du paramètre de Langlands de  $\sigma$  et que  $\sigma'_0$  vérifie l'hypothèse ci-dessus. Nous renvoyons le lecteur à **4** et **5.1** pour plus de précisions.

Inversement, nous émettons une hypothèse, quand le  $L$ -paquet associé à un homomorphisme admissible discret devrait être formé de représentations cuspidales qui sera justifiée postérieurement.

Ces hypothèses faites, nous associons à une représentation de carré intégrable  $\pi$  de  $G$  un homomorphisme admissible discret  $\psi_\pi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  qui est, à équivalence près, uniquement déterminé par  $\pi$ . Nous montrons que l'on obtient ainsi tous les homomorphismes admissibles qui sont discrets. À l'aide de la classification de Langlands, nous en déduisons un procédé qui associe à chaque homomorphisme admissible  $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  (le  $L$ -paquet d') une représentation irréductible lisse de  $G$ , ainsi qu'un procédé inverse.

Ce travail est donc une sorte de généralisation à un groupe réductif  $p$ -adique quelconque d'une portion des résultats classiques de Bernstein-Zelevinsky [R] pour  $\mathrm{GL}_n$ . Nous espérons en conséquence que les résultats énoncés ici seront utiles dans ce sens dans l'avenir.

Remarquons toutefois que nous n'obtenons aucune information sur les caractères non ramifiés  $\chi$  de  $M$ , tels que l'induite parabolique de  $\sigma \otimes \chi$  soit réductible. Dans les cas où cette information est disponible, en particulier si  $G$  est quasi-

déployé et la représentation  $\sigma$  est générique [S], il est pensable qu'une partie des hypothèses émises ici peut être vérifiée. Certains résultats énoncés seraient alors des théorèmes inconditionnés dans ces cas. Mais cela n'est pas encore écrit. Dans les cas des représentations lisses irréductibles génériques des groupes classiques déployés, on dispose toutefois des résultats de fonctorialité [CKPS] qui, ensemble avec la correspondance de Langlands pour  $GL_n$  [HT], permettent d'associer à toute représentation lisse irréductible générique d'un tel groupe un paramètre de Langlands, l'image de cette correspondance n'étant connue dans le cas local pour l'instant que si  $G = SO_{2n+1}(F)$  [JS].

Le plan de l'article est le suivant: au paragraphe 0, nous introduisons nos notions de base et rappelons le résultat principal de [H2]. Au paragraphe 1, nous revoyons la notion de  $L$ -groupe, ses propriétés ainsi que les notions d'homomorphisme admissible et de paramètre de Langlands. Le paragraphe 2 est consacré à la théorie des  $SL_2$ -triplets. Au paragraphe 3, on résume la théorie des orbites unipotentes d'un groupe réductif connexe complexe, on rappelle la notion de  $L^2$ -paire de G. Lusztig, on introduit la notion d'élément semi-simple  $q$ -distingué et on prouve finalement que tout élément semi-simple  $q$ -distingué peut être complété en une  $L^2$ -paire. Au paragraphe 4 nous énonçons les hypothèses qui sont nécessaires pour associer à un homomorphisme admissible discret une représentation de carré intégrable, et nous donnons quelques propriétés des homomorphismes admissibles. Les résultats principaux de l'article se trouvent alors dans le paragraphe 5.

L'auteur a séjourné durant des étapes préliminaires à ce travail à l'Institut for Advanced Study à Princeton (cofinancé par une bourse Feodor-Lynen de la fondation Humboldt et la bourse DMS 97-29992 de la NSF) et à l'IHÉS à Bures-sur-Yvette.

Il remercie particulièrement G. Lusztig, G. Prasad et F. Shahidi pour des discussions sur différents aspects de l'article, l'Université Purdue pour son hospitalité lors de l'aboutissement de ce travail et A.-M. Aubert pour quelques remarques supplémentaires.

**0. Notations et préliminaires:** Une bonne partie des notations et conventions introduites ci-dessous devrait être standard.

**0.1** L'ensemble des caractères rationnels d'un groupe algébrique  $\underline{H}$  sera noté  $X^*(\underline{H})$  et celui des cocaractères  $X_*(\underline{H})$ . On écrira  $\underline{H}^\circ$  pour la composante neutre,  $C(\underline{H})$  pour le centre de  $\underline{H}$  et  $C_{\underline{H}}(h)$  pour le centralisateur d'un élément  $h$  de  $\underline{H}$ . Si on parle du centralisateur d'un sous-groupe  $H_1$  de  $\underline{H}$ , on entendra par là l'intersection des  $C_{\underline{H}}(h)$ ,  $h$  parcourant  $H_1$ .

Si  $\underline{H}$  est un groupe réductif et  $\underline{T}$  un tore maximal de  $\underline{H}$ ,  $\Sigma(\underline{T})$  désignera l'ensemble des racines de  $\underline{T}$  dans l'algèbre de Lie de  $\underline{H}$ . On notera  $Ad$  l'action adjointe de  $\underline{T}$  sur l'algèbre de Lie de  $\underline{H}$ .

Le tore maximal dans le centre de  $\underline{H}$  sera noté  $T_{\underline{H}}$ .

**0.2** Soit  $\mathcal{G}$  un groupe algébrique complexe et  $s$  un élément semi-simple de  $\mathcal{G}$ . Fixons un sous-groupe diagonalisable minimal  $D$  de  $\mathcal{G}$  qui contient  $s$ . Notons  $D_c$  (resp.  $D_v$ ) le sous-groupe de  $D$  formé des éléments  $g$  de  $D$  tels que, pour tout caractère algébrique  $\chi : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $|\chi(g)| = 1$  (resp.  $\chi(g) \in \mathbb{R}^{>0}$ ). Alors  $D$  est canoniquement isomorphe au produit direct de  $D_v$  et  $D_c$ . Notons  $s_c$  (resp.  $s_v$ ) la projection de  $s$  sur  $D_c$  (resp.  $D_v$ ). On appellera  $s_c$  la partie compacte et  $s_v$  la partie hyperbolique de  $\mathcal{G}$ . Remarquons que la décomposition *polaire*  $s = s_c s_v$  est invariante par homomorphisme de groupes algébriques.

**0.3** Dans tout ce travail  $F$  désignera un corps local non archimédien,  $q$  le cardinal de son corps résiduel,  $|\cdot|_F$  sa valeur absolue normalisée,  $v_F$  la valuation discrète associée et  $W_F$  son groupe de Weil. On fixera un Frobénius géométrique  $Fr$  dans  $W_F$ . En identifiant l'abélianisé de  $W_F$  avec le groupe multiplicatif de  $F$  par la théorie du corps de classes (normalisée de sorte que les uniformisantes correspondent aux automorphismes de Frobénius géométriques), on définit  $v_F(\gamma)$  pour un élément  $\gamma$  de  $W_F$ . En particulier,  $v_F(Fr) = 1$ .

**0.4** Le symbole  $G$  désignera le groupe des points rationnels d'un groupe réductif connexe  $\underline{G}$  défini sur  $F$ . On se fixe un tore  $F$ -déployé maximal  $A_0$  dans  $\underline{G}$  et un tore maximal  $\underline{T}$  de  $\underline{G}$  défini sur  $F$  qui contient  $A_0$ . Fixons également un sous-groupe parabolique minimal  $\underline{P}_0$  de  $\underline{G}$  défini sur  $F$  et contenant  $\underline{T}$ . On notera  $\underline{M}_0$  l'unique facteur de Levi de  $\underline{P}_0$  défini sur  $F$  et qui contient  $A_0$ .

**0.5** On appellera sous-groupe parabolique semi-standard de  $G$  tout groupe qui est le nombre des points rationnels d'un sous-groupe parabolique de  $\underline{G}$  défini sur  $F$  et qui contient  $A_0$ . S'il contient en outre  $P_0$ , on l'appellera un sous-groupe parabolique standard. Dans les deux cas, il existe un unique facteur de Levi défini sur  $F$  qui contient  $A_0$ . En écrivant " $P = MU$  est un sous-groupe parabolique (semi-)standard de  $G$ ", on sous-entend que  $U$  est le radical unipotent de  $P$  et que  $M$  contient  $M_0$ . Un tel sous-groupe  $M$  de  $G$  sera plus simplement appelé sous-groupe de Levi (semi-) standard.

**0.6** Si  $M$  est un sous-groupe de Levi semi-standard de  $G$ , on notera  $A_M$  le tore déployé maximal dans le centre de  $M$  et  $\Sigma(A_M)$  l'ensemble des racines pour l'action de  $A_M$  dans l'algèbre de Lie de  $M$ . On pose  $a_M^* = X^*(A_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , et on note  $a_M$  l'espace dual. Si  $M'$  est un sous-groupe de Levi semi-standard de  $G$  qui contient  $M$ , on note  $a_M^{M'^*}$  le sous-espace de  $a_M^*$ , annulé par  $a_{M'}$ . On a donc une décomposition  $a_M^* = a_{M'}^* \oplus a_M^{M'^*}$ . On notera  $\lambda = \lambda_{M'} + \lambda_M^{M'}$  la décomposition d'un élément  $\lambda$  de  $a_M^*$  selon cette décomposition.

Le choix d'un sous-groupe parabolique semi-standard  $P$  de  $G$  dont  $M$  est un facteur de Levi est équivalent au choix d'un certain ordre  $>_P$  sur  $a_M^*$ . On notera

$\Sigma(P)$  l'ensemble des racines dans  $\Sigma(A_M)$  qui sont positives pour  $P$ . Rappelons que l'on a une bijection  $\alpha \mapsto M_\alpha$  entre l'ensemble des racines réduites dans  $\Sigma(P)$  et celui des sous-groupes de Levi semi-standard minimaux contenant  $M$ . (Le sous-groupe de Levi  $M_\alpha$  est le centralisateur de  $(\ker \alpha)^\circ$ .)

On a un procédé qui associe à un élément  $\lambda$  du complexifié  $a_{M,\mathbb{C}}^*$  de  $a_M^*$  un certain (quasi-)caractère  $\chi_\lambda$  de  $M$ . Si  $\alpha$  est un caractère  $F$ -rationnel de  $M$ , et si  $\lambda$  est un nombre complexe, alors  $\chi_{\lambda\alpha}(m) := |\alpha(m)|_F^\lambda$ . Un tel caractère de  $M$  sera appelé *caractère non ramifié*, et le groupe formé de ces caractères noté  $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ . Ce groupe a la structure d'une variété algébrique complexe.

**0.7** Fixons un sous-groupe parabolique semi-standard  $P = MU$  de  $G$ . Le groupe  $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$  agit sur l'ensemble des (classes d'équivalence) de représentations cuspidales de  $M$ . Une orbite  $\mathcal{O}$  pour cette action est une variété algébrique complexe. Sur  $\mathcal{O}$ , on a donc une notion de fonction rationnelle. La fonction  $\mu$  de Harish-Chandra est une certaine fonction rationnelle  $\mu = \mu^G$  définie sur une telle orbite  $\mathcal{O}$  qui apparaît naturellement dans la formule de Plancherel d'un groupe  $p$ -adique [W].

Si  $M$  est un sous-groupe de Levi maximal de  $G$  et  $\sigma$  une représentation cuspidale unitaire de  $M$ , alors la fonction  $\mu$  ne dépend que d'une seule variable complexe que l'on peut identifier avec  $\sigma \otimes \chi_\lambda$ ,  $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^{G*}$ . On sait que  $\sigma \otimes \chi_\lambda$ ,  $\lambda \in a_M^{G*}$ , ne peut être qu'un pôle de  $\mu$ , si  $\mu(\sigma) = 0$ . Inversement, si  $\mu(\sigma) = 0$ , il existe un unique  $\lambda \in a_M^{G*}$ , au signe près, tel que  $\mu$  soit singulier en  $\sigma \otimes \chi_\lambda$ . Ces pôles sont d'ordre 1, alors que les zéros sont d'ordre 2. Pour que la représentation induite  $i_P^G(\sigma \otimes \chi_\lambda)$  soit réductible avec  $\lambda$  non nul dans  $a_M^{G*}$ , il faut et il suffit que  $\sigma \otimes \chi_\lambda$  soit un pôle de  $\mu$ . On trouvera ces résultats dus à Harish-Chandra et en partie à A. Silberger dans [Si0] et [Si1] (comparer également la remarque [H2, 4.1] relative à la simplicité des pôles de la fonction  $\mu$ ).

Si  $M$  n'est plus un sous-groupe de Levi maximal de  $G$ , on a une formule du produit  $\mu = \prod_\alpha \mu^{M_\alpha}$ ,  $\alpha$  parcourant les racines réduites dans  $\Sigma(P)$ . Ces facteurs ne dépendent que d'une seule variable complexe,  $M$  étant un sous-groupe de Levi maximal de  $M_\alpha$ . L'ordre du pôle de  $\mu$  en un point  $\sigma \otimes \chi$  de  $\mathcal{O}$  est alors (par définition si on veut) égal à la somme des pôles des différents facteurs dans la formule du produit. On le note  $\text{ord}_{\sigma \otimes \chi} \mu$ . Si ce nombre est négatif, on parlera d'un zéro.

Rappelons que le rang parabolique de  $M$  est défini par  $\text{rg}_{ss}(G) - \text{rg}_{ss}(M)$  et signalons le théorème suivant qui est le résultat principal de [H2]:

**Théorème:** *Soit  $P = MU$  un sous-groupe parabolique de  $G$  et  $\sigma$  une représentation irréductible cuspidale de  $M$ . Pour que la représentation induite  $i_P^G \sigma$  possède un sous-quotient de carré intégrable, il faut et il suffit que  $\sigma$  soit un pôle de la fonction  $\mu$  de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de  $M$  et que la restriction de  $\sigma$  à  $A_G$  soit un caractère unitaire.*

**1.** On va résumer ci-dessous quelques propriétés du  $L$ -groupe, et on énoncera les conjectures locales de Langlands. Le lecteur trouvera plus des détails dans [B]. Seule la section **1.4** n'est peut-être pas recouverte par la littérature.

**1.1** Soit  $\underline{B}$  un sous-groupe de Borel de  $\underline{G}$  contenu dans  $\underline{P}_0$  et dont  $\underline{T}$  est un sous-groupe de Levi. Notons  $X^* = X^*(\underline{T})$  le groupe des caractères rationnels de  $\underline{T}$  et  $X_* = X_*(\underline{T})$  celui des cocaractères. Au choix de  $\underline{B}$  correspond une base  $\underline{\Delta}$  de  $\Sigma(\underline{T})$ . Notons  $\Phi(\underline{G}) = (X^*, \underline{\Delta}, X_*, \underline{\Delta}^\vee)$  la donnée radicielle basique associée à  $\underline{B}$  et  $\underline{T}$ , et  $\Phi^\vee(\underline{G}) = (X_*, \underline{\Delta}^\vee, X^*, \underline{\Delta})$  la donnée radicielle basique duale. Il existe - à isomorphisme près - un unique triplet  $(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$  formé d'un groupe réductif connexe complexe  $\widehat{G}$ , d'un sous-groupe de Borel  $\widehat{B}$  de  $\widehat{G}$  et d'un tore maximal  $\widehat{T}$  de  $\widehat{B}$  de donnée radicielle basique  $\Phi^\vee(\underline{G})$ .

**1.2** Fixons une clôture séparable  $F^{sep}$  de  $F$ . Si  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma = \text{Gal}(F^{sep}/F)$ , alors il existe  $g \in \underline{G}(F^{sep})$ , tel que  $g^\gamma \underline{T} g^{-1} = \underline{T}$  et que  $g^\gamma \underline{B} g^{-1} = \underline{B}$ . L'élément  $g$  est déterminé à un multiple par un élément de  $\underline{T}(F^{sep})$  près. On en déduit un automorphisme  $\nu_{\underline{G}} : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Phi^\vee(\underline{G}))$ . Remarquons que, si  $\underline{G}'$  est un autre groupe réductif connexe défini sur  $F$ , alors  $\nu_{\underline{G}} = \nu_{\underline{G}'}$ , si et seulement si  $\underline{G}'$  est une forme intérieure de  $\underline{G}$ .

Comme  $\text{Aut}(\Phi(\underline{G})) = \text{Aut}(\Phi^\vee(\underline{G}))$ , on déduit de tout monomorphisme  $\text{Aut}(\Phi^\vee(\underline{G})) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$  une action  $\nu_{\underline{G}}$  de  $\Gamma$  sur  $\widehat{G}$  que l'on notera  $g \mapsto {}^\gamma g$ . Cette action se factorise par le groupe de Galois de l'extension galoisienne minimale  $K/F$  sur laquelle  $\underline{G}$  se déploie. Cette extension est de degré fini. On définit alors  ${}^L G$  comme étant le produit semi-direct  $\widehat{G} \rtimes \text{Gal}(K/F)$  déduit de cette action de  $\text{Gal}(K/F)$ , i.e., pour tout  $g \in \widehat{G}$  et tout  $\gamma \in \text{Gal}(K/F)$ , on a  $\gamma g = {}^\gamma g \gamma$ . Cette définition dépend du choix du monomorphisme  $\text{Aut}(\Phi^\vee(\underline{G})) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$ . Si on change ce monomorphisme, on ne change  $\nu_{\underline{G}}$  toutefois que par un automorphisme intérieur  $\text{Int}(t)$ ,  $t \in \underline{T}$ . Le groupe  ${}^L G$  est donc déterminé à isomorphisme intérieur près. C'est un groupe réductif *complexe*, qui est connexe si et seulement si  $G$  est déployé.

**1.3** Un sous-groupe parabolique de  ${}^L G$  est un sous-groupe fermé de  $G$  qui est égal au normalisateur d'un sous-groupe parabolique  $\widehat{P}$  de  $\widehat{G}$  et dont la projection sur le deuxième facteur est  $\text{Gal}(K/F)$ . On dit qu'il est standard, s'il contient  ${}^L B := \widehat{B} \rtimes \text{Gal}(K/F)$ . Il est alors de la forme  $\widehat{P} \rtimes \text{Gal}(K/F)$  avec  $\widehat{P} \supseteq \widehat{B}$  (en particulier  $\widehat{P}$  possède un sous-groupe de Levi  $\widehat{M} \supseteq \widehat{T}$ ).

Tout sous-groupe parabolique de  ${}^L G$  est conjugué à un unique sous-groupe parabolique standard. Ainsi les classes de conjugaison des sous-groupes paraboliques de  ${}^L G$  sont en bijection avec les classes de conjugaison des sous-groupes paraboliques de  $\underline{G}$  stables pour l'action par  $\text{Gal}(K/F)$ .

On obtient une injection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard de

$G$  dans l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard de  ${}^L G$ , en associant à un sous-groupe parabolique standard  $P$  de  $G$  le sous-groupe parabolique  $\widehat{P} \rtimes \text{Gal}(K/F)$  de  ${}^L G$ . On notera  ${}^L P$  l'image de  $P$ .

Cette injection est bijective si et seulement si  $G$  est quasi-déployé. Un sous-groupe parabolique de  ${}^L G$  est dit *admissible*, s'il est conjugué à un sous-groupe parabolique de la forme  ${}^L P$  avec  $P$  un sous-groupe parabolique standard de  $G$ . On fait une définition analogue pour un sous-groupe de Levi de  ${}^L G$ .

**1.4** Remarquons que le tore maximal  $T_{\underline{G}}$  dans le centre  $C(\underline{G})$  de  $\underline{G}$  est défini sur  $T$ . Son groupe des points  $F$ -rationnel est donc égal à  $T_G$ . Comme le quotient de  $\underline{G}$  par son groupe dérivé est isomorphe au quotient de  $C(\underline{G})$  par un sous-groupe fini, on a un morphisme surjectif de groupes algébriques  $\underline{G} \rightarrow T_{\underline{G}}$ . Des propriétés de fonctorialité des  $L$ -groupes [B, 2.5], on déduit une inclusion  ${}^L T_G \hookrightarrow {}^L G$ , où  ${}^L T_G = T_{\widehat{G}} \rtimes \text{Gal}(K/F)$ . La composante neutre du centre de  ${}^L G$  est donc égale à la composante neutre du groupe des points fixes de  $T_{\widehat{G}}$  pour l'action de  $\text{Gal}(K/F)$ . Sa donnée de racines basique est  $(X^*(T_{\widehat{G}})^{\text{Gal}(K/F)}, \{1\}, X_*(T_{\widehat{G}})^{\text{Gal}(K/F)}, \{1\})$ . C'est le  $L$ -groupe du tore  $F$ -déployé maximal  $\underline{A}_G$  dans le centre de  $\underline{G}$ . En particulier,  $A_G$  et  $C({}^L G)^\circ$  ont même rang.

Plus généralement, on en déduit que, si  ${}^L M$  est un sous-groupe de Levi semi-standard de  ${}^L G$  (i.e.  ${}^L M$  contient  ${}^L T$ ), la composante neutre du centre de  ${}^L M$  correspond à un certain sous-tore de  $A_0$  dont le centralisateur est un sous-groupe de Levi semi-standard  $M$  de  $G$ . Ainsi, on obtient une bijection entre les sous-groupes de Levi semi-standard de  ${}^L G$  et de  $G$ . En particulier, si  $M$  est un tel sous-groupe de Levi de  $G$  et  $\alpha \in \Sigma(A_M)$ , alors  ${}^L M_\alpha$  est le centralisateur de la composante neutre du noyau de la racine  $\alpha^\vee$  de  $\widehat{T}$  (remarquons que la coracine  $\alpha^\vee$  de  $A_M$  a été définie dans [H2, 1.2]). On a  ${}^L M_\alpha = \widehat{M}_\alpha \rtimes \text{Gal}(K/F)$ .

En particulier, l'ensemble des racines  $\Sigma(A_M)$  s'identifie à un ensemble de coracines pour  $T_{L_M}$ .

Nous définissons le rang semi-simple *déployé*  $\text{rg}_{ss}({}^L M)$  d'un sous-groupe de Levi semi-standard  ${}^L M$  de  ${}^L G$  par  $\text{rg}_{ss}({}^L M) = \text{rg}(T_{L_T}) - \text{rg}(T_{L_M})$ . On appellera la différence  $\text{rg}_{ss}({}^L G) - \text{rg}_{ss}({}^L M)$  le *rang parabolique* de  ${}^L M$ . Le résultat suivant est une conséquence immédiate des remarques ci-dessus:

**Proposition:** *Pour tout sous-groupe de Levi semi-standard  $M$  de  $G$ ,  ${}^L M$  et  $M$  ont même rang parabolique.*

**1.5** Un morphisme de groupes  $\psi : W_F \times \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  est dit *admissible*, si

- (i) la composition de  $\psi$  avec la projection de  ${}^L G$  sur  $\text{Gal}(K/F)$  est égale à la projection  $W_F \rightarrow \text{Gal}(K/F)$ ;
- (ii) la restriction de  $\psi$  à  $W_F$  est un morphisme de groupes continu;
- (iii) la restriction de  $\psi$  à  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  est un morphisme de groupes algébriques;
- (iv) pour tout  $\gamma \in W_F$ ,  $\psi(\gamma, 1)$  est un élément semi-simple de  ${}^L G$ ;

(v) si  $\psi$  se factorise par un sous-groupe de Levi de  ${}^L G$ , alors celui-ci est admissible.

Un morphisme admissible  $\psi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  est dit *discret*, si  $\psi(W_F)$  est relativement compact et si l'image de  $\psi$  n'est contenue dans aucun sous-groupe de Levi propre de  ${}^L G$ . Deux morphismes admissibles  $\psi_1, \psi_2 : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  sont dits *équivalents*, s'il existe  $g \in \widehat{G}$  avec  $\mathrm{Int}(g) \circ \psi_1 = \psi_2$ , où  $\mathrm{Int}(g)$  désigne l'automorphisme intérieur de  $\widehat{G}$  associé à  $g$ .

L'homomorphisme admissible  $\psi$  est dit *non ramifié*, si sa restriction au sous-groupe d'inertie de  $W_F$  est trivial.

**1.6 Conjecture** (Conjecture locale de Langlands) *Les (classes d'équivalence de) représentations irréductibles lisses de  $G$  sont en bijection avec les classes d'équivalence de couples  $(\psi, \phi)$  formés d'un homomorphisme admissible  $\psi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  et d'une représentation irréductible  $\phi$  du groupe fini  $S_\psi := C_{L_G}(\mathrm{im}(\psi)) / C_{L_G}(\mathrm{im}(\psi))^\circ$ , les représentations de carré intégrable de  $G$  correspondant aux couples  $(\psi, \phi)$  avec  $\psi$  discret.*

*Remarque:* Ces conjectures ne sont connues en toute généralité que pour le groupe  $\mathrm{GL}_n$  grâce aux travaux de M. Harris et R. Taylor [HT] (qui établissent la correspondance pour les représentations cuspidales, le prolongement à l'ensemble (des classes d'équivalence) des représentations irréductibles lisses résultant de travaux préliminaires de J. Bernstein et A. Zelevinski [R]). Dans le cas où  $G$  est simple déployé de type adjoint, les représentations irréductibles lisses correspondant à des couples  $(\psi, \phi)$  avec  $\psi$  non ramifié ont été déterminées par G. Lusztig [L2].

Par ailleurs, comme déjà signalé dans l'introduction, la correspondance de Langlands pour les représentations irréductibles lisses génériques des groupes classiques déployés est une conséquence des résultats de fonctorialité dus à J.W. Cogdell, H.H. Kim, I.I. Piatetski-Shapiro et F. Shahidi [CKPS], joints à la correspondance de Langlands pour  $\mathrm{GL}_n$ , l'image de cette correspondance n'étant toutefois connue pour l'instant que si  $G = \mathrm{SO}_{2n+1}(F)$  [JS].

**1.7 Définition:** Soit  $\pi$  une représentation irréductible lisse de  $G$ . Si  $\pi$  correspond au couple  $(\psi, \phi)$  par les conjectures locales de Langlands, alors on appellera  $\psi$  le *paramètre de Langlands* de  $\pi$ . Deux représentations irréductibles lisses de  $G$  sont dans le même  *$L$ -paquet* si et seulement s'ils ont même paramètre de Langlands.

**1.8** Dans le cas des tores, la correspondance conjecturée en **1.6**, a été prouvée par Langlands dans [L]. Si  $G$  est un tore déployé,  $G = (F^\times)^d$ , elle associe au caractère non ramifié  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x_1, \dots, x_d) \mapsto |x_1|_F^{\lambda_1} \cdots |x_d|_F^{\lambda_d}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ , l'homomorphisme non ramifié  $W_F \rightarrow {}^L G = (\mathbb{C}^\times)^d$  qui envoie  $Fr$  sur  $s := (q^{\lambda_1}, \dots, q^{\lambda_d})$ . On dira que  $s$  correspond à  $\chi$  (ou à  $\lambda$ , si  $\chi = \chi_\lambda$  pour un  $\lambda \in a_{G, \mathbb{C}}^*$ )



par la *correspondance de Langlands pour les tores*, et vice-versa. Si  $\lambda$  est réel (i.e.  $\lambda \in a_G^*$ ), alors la partie compacte dans la décomposition polaire de  $s$  (cf. **0.2**) est triviale.

D'autre part, si  $M$  est un sous-groupe de Levi semi-standard d'un groupe  $p$ -adique et si  $\alpha$  est une racine relative à  $A_M$ , alors le caractère non ramifié  $\chi_\alpha$  de  $M$  correspond à l'élément semi-simple  $\alpha(q)$  de  $T_{L_M}$  (où on considère  $\alpha$  comme coracine relative à  $T_{L_M}$  (cf. **1.4**)).

**2.** Dans cette section, on se fixe un groupe algébrique connexe complexe semi-simple  $\mathcal{G}$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Les résultats résumés dans **2.1-2.3** sont bien connus, et on renvoie le lecteur à [Ca] pour plus de précisions.

**2.1 Théorème:** (Jacobson-Morozow) *Soit  $N$  un élément nilpotent non nul de  $\mathfrak{g}$ . Alors il existe un morphisme d'algèbres de Lie  $\phi : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{g}$  vérifiant  $\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = N$ .*

**2.2 Définition:** Un triplet  $\{H, N, \overline{N}\}$  dans  $\mathfrak{g}$  tel qu'il existe un morphisme d'algèbres de Lie  $\phi : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{g}$  vérifiant  $\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = N$ ,  $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = H$  et  $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \overline{N}$  est appelé un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet.

**2.3 Proposition:** *Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\{H, N, \overline{N}\}$  soit un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet dans  $\mathfrak{g}$ , est que ses éléments vérifient les relations  $[H, N] = 2N$ ,  $[H, \overline{N}] = -2N$  et  $[N, \overline{N}] = H$ .*

*Deux  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet sont égaux, s'ils ont deux éléments en commun.*

En utilisant l'application exponentielle, on déduit alors de **2.1** et **2.3** le corollaire suivant:

**2.4 Corollaire:** *Soit  $s$  un élément semi-simple et  $u = \exp(N)$  un élément unipotent de  $\mathcal{G}$ . Supposons que  $H = \frac{2}{\log q} \log s$  et  $N = \log u$  font partie d'un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet dans l'algèbre de Lie de  $G$ .*

*Alors il existe un unique morphisme de groupes algébriques  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}$  qui envoie  $\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}$  sur  $s$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\exp(N)$ . Son image est un groupe réductif semi-simple de rang 1 et l'image de  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est égale au conjugué de  $\exp(N)$  par l'unique élément du groupe de Weyl de ce groupe.*

**2.5** Une condition nécessaire pour que les hypothèses du corollaire **2.4** soient vérifiées relativement à un élément semi-simple  $s$  et un élément unipotent  $u$  de  $\mathcal{G}$

est évidemment  $sus^{-1} = u^q$ . Mais, cette condition n'est pas suffisante. Cependant, le résultat suivant vaut :

**Proposition:** *Soient  $s$  un élément semi-simple et  $u$  un élément unipotent de  $\mathcal{G}$  tels que  $sus^{-1} = u^q$ . Alors il existe un élément semi-simple  $s_1$  dans  $\mathcal{G}$  et un morphisme de groupes algébriques  $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}$  vérifiant*

$$\phi\left(\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}\right) = s_1 \quad \text{et} \quad \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = u,$$

*tels que  $ss_1^{-1}$  commute aux éléments dans l'image de  $\phi$ . En particulier,  $s$  et  $s_1$  commutent.*

*Preuve:* Ce résultat est contenu dans [KL, paragraph 2]. Cependant ces auteurs font globalement l'hypothèse que le groupe dérivé de  $\mathcal{G}$  est simplement connexe. On va reprendre les arguments de [KL] pour montrer que cette hypothèse n'intervient pas dans ce résultat: choisissons un homomorphisme de groupes algébriques  $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}$  vérifiant  $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = u$ . Posons  $\alpha^\vee(z) = \begin{pmatrix} z^{1/2} & 0 \\ 0 & z^{-1/2} \end{pmatrix}$ ,

$$M(u) = \{(g, z) \in \mathcal{G} \times \mathbb{C}^* \mid gug^{-1} = u^z\} \quad \text{et}$$

$$M_\phi = \{(g, z) \in \mathcal{G} \times \mathbb{C}^* \mid g\phi(h)g^{-1} = \phi(\alpha^\vee(z)h\alpha^\vee(z^{-1})) \text{ pour tout } h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\}.$$

Comme  $\phi$  est uniquement déterminé à conjugaison par un élément de  $C_{\mathcal{G}}(u)$  près, on montre comme dans [BV, 2.1] que  $M_\phi$  est un groupe réductif maximal de  $M(u)$ . (Ni la preuve dans [BV], ni cette généralisation n'utilisent d'hypothèse sur le groupe dérivé de  $\mathcal{G}$ .)

Rappelons que tout groupe algébrique est le produit semi-direct d'un sous-groupe réductif maximal par son radical unipotent et que deux sous-groupes réductifs maximaux sont conjugués par un élément du radical unipotent. Les sous-groupes réductifs maximaux de  $M(u)$  sont donc nécessairement de la forme  $M_\phi$  avec  $\phi$  comme ci-dessus. Comme  $(s, q)$  est un élément semi-simple de  $M(u)$ , il existe  $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}$  vérifiant  $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = u$ , tel que  $(s, q) \in M_\phi$ . Posons  $s_1 = \phi\left(\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}\right)$ . Comme  $(s_1, q) \in M_\phi$ , il en résulte que  $(ss_1^{-1}, 1) \in M_\phi$ . Par suite,  $ss_1^{-1}$  commute avec les éléments dans l'image de  $\phi$  et en particulier avec  $s_1$ .  $\square$

**2.6 Définition:** Soit  $s$  un élément semi-simple de  $\mathcal{G}$  et  $N$  un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . On dit que  $(s, N)$  est une  $L^2$ -paire relative à  $\mathcal{G}$ , si  $Ad(s)N = qN$ , et si tout tore de  $\mathcal{G}$  qui centralise simultanément  $s$  et  $N$  est inclus dans le centre de  $\mathcal{G}$ .

*Remarque:* Cette notion est celle introduite par G. Lusztig dans [L1] pour  $\mathcal{G}$  un groupe semi-simple, à la différence près que Lusztig suppose  $Ad(s)N = q^{-1}N$ .

**3.** Nous continuons à noter  $\mathcal{G}$  un groupe réductif complexe connexe et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Les notions et propriétés données dans **3.1** - **3.4** ci-dessous relatives aux orbites nilpotentes et unipotentes d'un groupe réductif complexe sont bien connues. Le lecteur pourra consulter par exemple [Ca] pour des preuves détaillées.

**3.1 Définition:** Un élément nilpotent  $N$  de  $\mathfrak{g}$  est dit distingué, si et seulement si  $\exp(N)$  n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi propre de  $\mathcal{G}$ .

**3.2 Proposition:** Supposons  $\mathcal{G}$  semi-simple de type adjoint. Soit  $N$  un élément nilpotent non nul dans  $\mathfrak{g}$  et  $\{H, N, \overline{N}\}$  un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet contenant  $N$ . Posons  $\mathfrak{g}_H(\lambda) = \{Z \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}(H)Z = \lambda Z\}$ .

Alors  $\dim \mathfrak{g}_H(0) \geq \dim \mathfrak{g}_H(2)$ . Pour que  $N$  soit distingué dans  $G$ , il faut et il suffit que  $\dim \mathfrak{g}_H(0) = \dim \mathfrak{g}_H(2)$ . On a alors  $\mathfrak{g}_H(\lambda) = 0$  pour tout entier impair  $\lambda$ .

*Remarque:* Si la dernière propriété de la proposition est vérifiée, on dit que  $H$  et  $\exp(H)$  sont *pairs*.

**3.3** Supposons  $\mathcal{G}$  simple de type adjoint. Fixons un sous-groupe de Borel  $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{U}$  de  $\mathcal{G}$  et notons  $\Delta_1$  la base correspondante du système de racines  $\Sigma_1 = \Sigma(\mathcal{T})$  de  $\mathcal{G}$ . Soit  $J$  un sous-ensemble de  $\Delta_1$  et  $n_J : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{N}$  défini par  $n_J(\sum_{\alpha \in \Delta_1} \lambda_\alpha \alpha) = 2 \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha$ .

Le sous-groupe parabolique  $\mathcal{P}_J$  de  $\mathcal{G}$  associé à  $J$  est dit *distingué*, si et seulement si

$$|\{\beta \in \Sigma_1 \mid n_J(\beta) = 2\}| = \text{rg}(\mathcal{G}) + |\{\beta \in \Sigma_1 \mid n_J(\beta) = 0\}|.$$

**Proposition:** Soit  $\mathfrak{g}_J(2)$  (resp.  $\mathfrak{g}_J(0)$ ) la somme directe des sous-espaces de  $\mathfrak{g}$  de poids  $\alpha$  vérifiant  $n_J(\alpha) = 2$  (resp.  $n_J(\alpha) = 0$  et de l'algèbre de Lie de  $\mathcal{T}$ ).

Alors  $\dim \mathfrak{g}_J(0) \geq \dim \mathfrak{g}_J(2)$ .

**3.4 Théorème:** (Bala-Carter) Supposons  $\mathcal{G}$  simple de type adjoint. Soit  $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$  un sous-groupe parabolique distingué de  $\mathcal{G}$ .

Alors il existe dans l'algèbre de Lie de  $\mathcal{U}$  une unique orbite pour l'action de  $\mathcal{P}$  qui est dense. Elle est formée d'éléments nilpotents distingués. L'application ainsi définie induit une bijection entre les classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques distingués de  $\mathcal{G}$  et les classes de conjugaison d'éléments nilpotents distingués dans  $\mathfrak{g}$ .

**3.5 Définition:** Soit  $s$  un élément semi-simple de  $\mathcal{G}$ . Notons  $\mathfrak{g}^{der}$  l'algèbre de Lie du groupe dérivé de  $\mathcal{G}$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $Ad(s)|_{\mathfrak{g}^{der}}$ , notons  $\mathfrak{g}_s(\lambda)$  l'espace propre associé à cette valeur propre. Alors  $s$  est dit  $q$ -distingué, si  $\dim(\mathfrak{g}_s(q)) \geq \dim(\mathfrak{g}_s(1))$ .

*Remarque:* Il résultera de la preuve du théorème 3.6 (cf. 3.6.2) que l'inégalité ci-dessus est en fait une égalité.

**3.6** La preuve du théorème suivant était l'objet de [H1]. Comme ce manuscrit n'a pas été publié, nous la reproduisons ci-dessous.

**Théorème:** Soit  $s$  un élément semi-simple de  $\mathcal{G}$ . Pour que  $s$  soit  $q$ -distingué, il faut et il suffit que  $s$  fasse partie d'une  $L^2$ -paire  $(s, N)$  pour  $\mathcal{G}$ . La composante nilpotente  $N$  est déterminée par  $s$  à multiplication par un scalaire non nul près.

*Preuve:* La preuve résultera des propositions 3.6.1-3.6.3 ci-dessous.

Notons  $s_v s_c$  la décomposition polaire de  $s$  (cf. 0.2).

(3.6.1) Soit  $s$  un élément  $q$ -distingué de  $\mathcal{G}$ . Supposons  $s = s_v$ . Fixons un tore maximal  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{G}$  contenant  $s$  et un ensemble  $\Delta_1$  de racines simples relatives à  $\mathcal{T}$  pour lequel  $s$  est positif. Alors toute racine  $\alpha$  de  $\Delta_1$  vérifie ou  $\alpha(s) = 1$  ou  $\alpha(s) = q$ . L'inégalité dans 3.5 est en fait une égalité. Il existe un élément nilpotent distingué  $N$  dans l'algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$ , tel que  $Ad(s)N = qN$ .

*Preuve de (3.6.1):* Notons  $\mathcal{B} = \mathcal{TU}$  le sous-groupe de Borel de  $\mathcal{G}$  correspondant à  $\Delta_1$ . Posons  $s = s^{2\pi i / \log q}$ . On a  $s = s_c$ . Le groupe  $\mathcal{G}' = C_{\mathcal{G}}(s_c)^\circ$  est réductif connexe de système de racines  $\Sigma'_1 = \{\alpha \in \Sigma_1 \mid \alpha(s) = 1\} = \{\alpha \in \Sigma_1 \mid \alpha(s) \in q^{\mathbb{Z}}\}$  relatif à  $\mathcal{T}$ . Un sous-groupe de Borel est donné par  $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap \mathcal{G}'$ . Notons  $\Delta'_1$  la base de  $\Sigma'_1$  correspondant à  $\mathcal{B}'$ . Posons  $J_1 = \{\alpha \in \Delta'_1 \mid \alpha(s) = 1\}$  et  $J_q = \{\alpha \in \Delta'_1 \mid \alpha(s) = q\}$ . On montrera d'abord que  $\Delta'_1 = J_1 \cup J_q$ .

Soit  $\mathcal{M}'_{\Delta'_1 - (J_1 \cup J_q)}$  le sous-groupe de Lévi standard de  $\mathcal{G}'$  dont les racines simples sont les éléments de  $J_1 \cup J_q$ . On a  $s \in \mathcal{M}'_{\Delta'_1 - (J_1 \cup J_q)}$  et toute racine positive  $\alpha \in \Sigma'_1$  qui vérifie  $\alpha(s) = q$  ou  $\alpha(s) = 1$  est combinaison linéaire d'éléments de  $J_1 \cup J_q$ .

Le quotient de  $\mathcal{M}'_{\Delta'_1 - (J_1 \cup J_q)}$  par son centre est homomorphe par une bijection à un groupe semi-simple de type adjoint  $\mathcal{M}'^{ad}$  qui lui est produit direct de groupes simples de type adjoint,  $\mathcal{M}'^{ad} = \mathcal{M}'_1 \times \cdots \times \mathcal{M}'_r$ . On a  $|J_1 \cup J_q| = \text{rg}_{ss}(\mathcal{M}'_{\Delta'_1 - (J_1 \cup J_q)}) = \sum_i \text{rg}_{ss}(\mathcal{M}'_i)$ . Notons  $J_{1,i}$  (resp.  $J_{q,i}$ ) le sous-ensemble de  $J_1$  (resp.  $J_q$ ), formé de racines pour  $\mathcal{M}'_i$ ,  $\Sigma'_i$  la composante irréductible de  $\Sigma'$  correspondant à  $\mathcal{M}'_i$  et  $\mathcal{P}'_{i, J_{1,i}}$  le sous-groupe parabolique standard de  $\mathcal{M}'_i$  de Lévi

$\mathcal{M}'_{i,J_{1,i}}$ . On déduit de **3.3** que  $\dim \mathfrak{g}_s(q) \leq \dim \mathfrak{g}_s(1)$ , d'où

$$\begin{aligned} \text{rg}_{ss} \mathcal{G} &\leq |\{\alpha \in \Sigma^+ | \alpha(s) = q\}| - 2|\{\alpha \in \Sigma^+ | \alpha(s) = 1\}| \\ (*) \quad &\leq \sum_i |J_{1,i} \cup J_{q,i}| = |J_1 \cup J_q| \leq \text{rg}_{ss} \mathcal{G}. \end{aligned}$$

On a donc l'égalité partout. En particulier, le système de racines  $\Sigma'_1$  a le même rang que  $\Sigma_1$ ,  $J_0 \cup J_1 = \Delta'_1$ , et l'inégalité (\*) (et par suite l'inégalité dans **3.5**) est en fait une égalité.

Ceci prouve que le parabolique  $\mathcal{P}'_{J_1}$  est distingué dans  $\mathcal{G}$ . Par le théorème de Bala-Carter **3.4**, on peut donc trouver un élément nilpotent distingué dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de  $\mathcal{P}'_{J_1}$ , tel que, pour un certain  $sl_2$ -triplet pour  $N$ ,  $s$  soit un élément du tore de rang 1 de  $\mathcal{G}'$  déduit de ce triplet. Comme  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  ont même rang et qu'aucune racine  $\alpha$  de  $\Sigma \setminus \Sigma'$  ne peut vérifier  $\alpha(s) = 1$ ,  $N$  est distingué pour  $\mathcal{G}$  par **3.2**. Il est donc pair. Le résultat sur  $s$  en suit.  $\square$

(3.6.2) *On garde les notations et hypothèses du lemme précédent, mais on ne suppose plus  $s = s_v$ .*

*L'inégalité dans **3.5** est en fait une égalité. Il existe un élément nilpotent  $N$  dans l'algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$ , tel que  $(s, N)$  soit une  $L^2$ -paire.*

*Preuve de (3.6.2):* Soient  $\mathcal{B}$  et  $\Sigma_1$  comme dans 3.6.1. La composante neutre  $\mathcal{G}'$  du centralisateur de  $s_c$  dans  $\mathcal{G}$  est un groupe réductif connexe de système de racines  $\Sigma'_1 = \{\alpha \in \Sigma | \alpha(s_c) = 1\}$ . Le groupe  $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap \mathcal{G}'$  est un sous-groupe de Borel de  $\mathcal{G}$  pour lequel  $s$  est positif et distingué. On a  $\alpha(s) = \alpha(s_v)$  pour tout  $\alpha \in \Sigma'_1$ . On déduit de 3.6.1 et de son inégalité (\*) que  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  ont même rang semi-simple et que l'inégalité dans **3.5** est en fait une égalité. En particulier, le groupe  $\mathcal{G}'/Z(\mathcal{G})$  est semi-simple.

Grâce à 3.6.1, on peut choisir un élément nilpotent distingué dans l'algèbre de Lie de  $\mathcal{G}'$  qui vérifie  $\text{Ad}(s)N = qN$ . Il reste à voir qu'aucun sous-tore non trivial de  $G/Z(G)$  ne peut centraliser simultanément  $s$  et  $N$ . En effet, comme la décomposition polaire  $s = s_v s_c$  est invariant par homomorphismes de groupes algébriques, un tel tore  $S$  centraliserait  $s_c$ . Par suite,  $S \subset \mathcal{G}'/C(\mathcal{G})$ . Comme  $S$  centralise également  $N$  et que  $N$  est distingué, on en déduit  $S = 1$ .  $\square$

(3.6.3) *Soit  $(s, N)$  une  $L^2$ -paire relative à  $q$ . Alors  $s$  est  $q$ -distingué. L'élément nilpotent  $N$  est déterminé par  $s$  à multiplication par un scalaire non nul près.*

*Preuve:* Quitte à remplacer  $\mathcal{G}$  par son quotient par le centre, on peut supposer  $\mathcal{G}$  semi-simple. Comme  $(s, N)$  est une  $L^2$ -paire, le centralisateur connexe  $\mathcal{G}'$  de la partie compacte de  $s$  est semi-simple. En particulier,  $\mathcal{G}$  est de même rang que  $\mathcal{G}'$ . La relation  $\text{Ad}(s)N = qN$  prouve que  $N$  est dans l'algèbre de Lie de  $\mathcal{G}'$ . Comme

$(s, N)$  est une  $L^2$ -paire,  $N$  est un élément nilpotent distingué de l'algèbre de Lie de  $\mathcal{G}'$ . Il est prouvé dans [L1, exemple 2.4] que  $s_v$  est un élément du tore  $S$  de rang 1 déduit d'un certain  $sl_2$ -triplet pour  $N$  dans l'algèbre de Lie de  $\mathcal{G}'$ . Il en résulte que  $s$  est  $q$ -distingué.

Choisissons un tore maximal  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{G}'$  contenant  $S$  et un ensemble  $\Delta_1$  de racines simples relatives à  $\mathcal{T}$  pour lequel  $s$  est positif. On déduit de **3.2** que toute racine  $\alpha$  dans  $\Delta_1$  vérifie  $\alpha(s) \in \{1, q\}$  et que le parabolique standard  $\mathcal{P}'_J$ ,  $J = \{\alpha | \alpha(s) = 1\}$ , est celui associé à  $N$  par le théorème de Bala-Carter. Il est donc distingué. L'unicité de  $N$  à multiplication par un scalaire près résulte alors de la théorie des orbites unipotentes (cf. [Ca, proposition 5.8.5]).  $\square$

**3.7** En considérant  $\mathcal{G}$  comme le dual d'un certain groupe réductif connexe déployé défini sur  $F$ , on obtient le résultat suivant:

**Proposition:** *Soit  $(s, N)$  une  $L^2$ -paire relative à  $\mathcal{G}$ . Supposons que  $s$  soit un élément du groupe dérivé de  $\mathcal{G}$  et que la partie compacte de  $s$  dans sa décomposition polaire soit triviale. Alors il existe un morphisme de groupes algébriques  $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}$  qui vérifie*

$$\phi\left(\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}\right) = s \quad \text{et} \quad \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \exp(N).$$

*Il est admissible et discret et, à équivalence près, uniquement déterminé par  $s$ .*

*Preuve:* Par **2.5**, on peut choisir  $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}$  et un élément semi-simple  $s_1$  de  $\mathcal{G}$  tel que  $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \exp(N)$ ,  $\phi\left(\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}\right) = s_1$  et que  $z_1 := ss_1^{-1}$  commute aux éléments dans l'image de  $\phi$ . L'élément  $s_1$  appartient nécessairement au groupe dérivé de  $\mathcal{G}$  et la partie compacte dans la décomposition polaire de  $s_1$  est triviale, celle-ci étant invariante par morphisme de groupes algébriques. Il en est donc de même de  $z_1$ . Il suffit de montrer qu'en fait  $z_1 = 1$  sous nos hypothèses. Écrivons  $N = \sum_{\alpha} N_{\alpha}$ , où  $N_{\alpha}$  est un élément de l'algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$  de poids  $\alpha$ . Notons  $n$  le rang semi-simple de  $\mathcal{G}$ . Comme  $N$  est distingué, il doit y être  $n$  racines linéairement indépendantes  $\alpha$  telles que  $N_{\alpha} \neq 0$ . Ces racines vérifient  $\alpha(z_1) = 1$ . Comme  $z_1$  est un élément du groupe dérivé de  $\mathcal{G}$  dont la partie compacte est triviale, ceci prouve que  $z_1 = 1$ .

Le morphisme est discret, puisque  $(s, N)$  est une  $L^2$ -paire, et il est alors immédiat qu'il est admissible. L'unicité vient de **2.4**.  $\square$

**4.** On va maintenant introduire les hypothèses dont nous aurons besoin. Rappelons que le symbole  $G$  désigne le groupe des points  $F$ -rationnels d'un groupe réductif connexe défini sur  $F$ .

**4.1** Le résultat suivant est bien connu. Par manque de référence, nous en donnons une preuve:

**Lemme:** *Soit  $\psi : W_F \rightarrow {}^L G$  un homomorphisme admissible. Alors on peut écrire  $\psi = \psi_{nr} \psi_f$  où  $\psi_f$  est un homomorphisme admissible à image finie et  $\psi_{nr}$  un homomorphisme admissible non ramifié (donc trivial sur le groupe d'inertie) à valeurs dans le centralisateur de l'image de  $\psi$ .*

*Remarque:* Le morphisme  $\psi_{nr}$  devrait être lié, par les conjectures locales de Langlands **1.6**, au caractère central d'une représentation de  $G$  de paramètre de Langlands  $\psi$ .

*Preuve:* Le groupe  $W_F$  est un produit semi-direct du sous-groupe d'inertie  $I_F$  avec le sous-groupe cyclique engendré par l'automorphisme de Frobenius  $Fr$ ,  $W_F = I_F \rtimes \langle Fr \rangle$ . Le groupe  $I_F$  étant compact,  $\psi(I_F)$  est fini. (C'est une propriété bien connue des topologies profinies et complexes.) Il existe donc une extension de degré fini  $K/F$  telle que  $\psi$  se factorise par  $I_K \rtimes \langle Fr \rangle$ . Considérons l'homomorphisme induit  $\bar{\psi} : I_F/I_K \rtimes \langle Fr \rangle \rightarrow {}^L G$ . L'automorphisme intérieur du groupe fini  $\bar{\psi}(I_F/I_K)$  induit par  $\bar{\psi}(Fr)$  est évidemment d'ordre fini. Il existe donc un entier  $k \geq 1$ , tel que  $s = \bar{\psi}(Fr^k)$  centralise  $\bar{\psi}(I_F/I_K)$ . Par suite, il centralise également l'image de  $\psi$ . Comme le nombre de composantes connexes d'un groupe algébrique est fini, il existe un entier  $l$  tel que  $s^l \in \hat{G}$ . Le centralisateur connexe d'un élément semi-simple dans un groupe réductif connexe étant réductif, le centralisateur de  $s^l$  dans  ${}^L G$  est un groupe réductif  ${}^L G_1$  qui contient l'image de  $\psi$ . Notons  $D$  un sous-groupe algébrique diagonalisable contenu dans le centre de  ${}^L G_1$  et contenant  $s^l$ . On a  $D = D_d \times D_f$ , où  $D_f$  est un sous-groupe fini et  $D_d$  un tore. Notons  $m$  l'ordre de  $D_f$ . Alors  $s^{lm}$  appartient à  $D_d$ . Il existe donc  $s_1 \in D_d$  tel que  $s_1^{klm} = s^{lm}$ . L'homomorphisme  $\psi_f : I_F \rtimes \langle Fr \rangle \rightarrow {}^L G$ ,  $(h, Fr^j) \mapsto \psi(h, Fr^j) s_1^{-j}$  est bien défini, continu et à image finie. On en déduit le lemme.  $\square$

Le résultat suivant est crucial pour la suite. Il a déjà été remarqué dans [K]. Nous présentons ci-dessous une preuve légèrement différente.

**Proposition:** *Soit  $\psi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  un homomorphisme admissible. Alors le centralisateur de  $\psi(W_F)$  dans  ${}^L G$  est un groupe réductif.*

*Preuve:* Par le lemme, on peut écrire  $\psi = \psi_{nr} \psi_f$ . Rappelons que l'on a fixé un Frobenius  $Fr$  dans  $W_F$ . On a  $\psi_f(Fr)^k = 1$  pour un certain entier  $k > 0$ . Le centralisateur de  $\psi(W_F)$  est donc contenu dans celui du groupe cyclique engendré par  $\psi_{nr}(Fr)^k = \psi(Fr)^k$ . Le nombre de composantes connexes de  ${}^L G$  étant fini, il existe un entier positif  $m$ , tel que  $\psi_{nr}(Fr)^{km} \in \hat{G}$ .

Comme le centralisateur d'un élément semi-simple dans un groupe réductif con-

nexe est réductif, le centralisateur de  $\psi_{nr}(Fr)^{km}$  dans  ${}^L G$  est un sous-groupe réductif  $\mathcal{G}$  de  ${}^L G$ . Comme  $\psi_{nr}(Fr)$  est contenu dans  $\mathcal{G}$ , l'automorphisme intérieur défini par  $\psi_{nr}(Fr)$  induit un automorphisme de  $\mathcal{G}$ . Il est d'ordre fini. Comme  $\psi_f(W_F)$  est également contenu dans  $\mathcal{G}$ , le centralisateur de  $\psi(W_F)$  dans  ${}^L G$  est égal au groupe des points fixes des automorphismes intérieurs de  $\mathcal{G}$  définis par les éléments semi-simples  $\psi_{nr}(\gamma)\psi_f(\gamma)$ ,  $\gamma \in W_F$ . Or, par ce qui précédait, ces automorphismes forment par restriction un sous-groupe fini du groupe des automorphismes du groupe réductif connexe complexe  $\mathcal{G}^\circ$ . Il est bien connu (cf. par exemple [PY]) que le groupe des points fixes d'un tel groupe fini d'automorphismes est un groupe réductif. Ceci prouve la proposition.  $\square$

**4.2 Proposition:** *Soit  $\psi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  un homomorphisme admissible et soit  ${}^L M_\psi$  un sous-groupe de Levi minimal de  ${}^L G$  qui contient  $\psi(W_F)$ . Le tore maximal  $\widehat{T}_\psi$  contenu dans le centre de  ${}^L M_\psi$  est un tore maximal du centralisateur de  $\psi(W_F)$  dans  ${}^L G$ .*

*Preuve:* Le tore maximal  $\widehat{T}_\psi$  contenu dans le centre de  ${}^L M_\psi$  est inclus dans le centralisateur de  $\psi(W_F)$ . Il reste à voir qu'il est maximal. Notons  $\widehat{T}^\psi$  un tore maximal du centralisateur de  $\psi(W_F)$  qui le contient. Le centralisateur de  $\widehat{T}^\psi$  dans  ${}^L G$  contient  $\psi(W_F)$ . Il se projette donc sur  $\mathrm{Gal}(K/F)$ . Par suite, c'est un sous-groupe de Levi de  ${}^L G$  (cf. [B, 3.5]) qui est nécessairement contenu dans  ${}^L M_\psi$ . Par minimalité de  ${}^L M_\psi$ , on a l'égalité, d'où  $\widehat{T}_\psi = \widehat{T}^\psi$ .  $\square$

**4.3** Nous fixons pour la suite de cette section un sous-groupe parabolique standard  $P = MU$  de  $G$ .

Nous dirons qu'une représentation irréductible cuspidale unitaire  $(\sigma, E)$  de  $M$  vérifie l'hypothèse (LM), si l'assertion suivante est vérifiée.

(LM) *On peut associer à  $\sigma$  un homomorphisme admissible discret  $\psi_\sigma : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M$  ayant les propriétés suivantes: tout d'abord on suppose que  $\psi_\sigma$  ait été choisi tel que l'on puisse trouver un sous-groupe de Levi minimal  ${}^L M_\sigma$  de  ${}^L M$  qui contienne  $\psi_\sigma(W_F)$  et  $s_\sigma := \psi_\sigma\left(\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}\right)$  et qui soit semi-standard.*

*Notons  ${}^L M^\sigma$  le centralisateur de  $\psi_\sigma(W_F)$  dans  ${}^L G$  et  $\widehat{M}^\sigma$  sa composante neutre. Fixons ensuite une forme intérieure  $G_0$  de  $G$  tel que  ${}^L M_\sigma$  soit un sous-groupe de Levi admissible pour  $G_0$ . Notons  $M_0$  le sous-groupe de Levi semi-standard de  $G_0$  qui correspond à  ${}^L M$  et  $M_\sigma$  celui qui correspond à  ${}^L M_\sigma$ . Fixons un sous-groupe parabolique  $P_\sigma$  de Levi  $M_\sigma$  de  $G_0$ . Notons  $\chi_{\lambda_\sigma}$  l'élément de  $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M_\sigma)$  qui correspond à  $s_\sigma := \psi_\sigma\left(\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}\right)$  par la correspondance de Langlands pour les tores.*

*(Remarquons que  $\lambda_\sigma \in a_M^*$ , puisque la partie compacte de  $s_\sigma$  est nécessairement triviale.) Alors on demande de plus que l'on peut choisir  $G_0$  tel que les conditions*



suivantes soient vérifiées:

a) il existe une représentation irréductible cuspidale unitaire  $\sigma_0$  de  $M_\sigma$ , tel que  $i_{P_\sigma \cap M_0}^{M_0}(\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda_\sigma})$  possède un sous-quotient de carré intégrable  $\pi_0$ , de sorte que, identifiant  $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_0)$  et  $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$  par la correspondance de Langlands pour les tores,  $\pi_0$  et  $\sigma$  ont même fonction  $\mu$ ;

b) pour toute racine réduite  $\alpha$  dans  $\Sigma(P_\sigma)$ , on a la propriété suivante: remarquons que  $(\widehat{M}^\sigma \cap \widehat{M}_\alpha)^\circ$  est égal au centralisateur connexe de  $\psi_\sigma(W_F)$  dans  ${}^L M_\alpha$ . Pour que  $\lambda \mapsto \mu^{M_{\sigma,\alpha}}(\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda_\alpha})$  ait un pôle en  $\lambda > 0$ , il faut et il suffit que  $\alpha(q)^\lambda$  soit un élément  $q$ -distingué de  $(\widehat{M}^\sigma \cap \widehat{M}_\alpha)^\circ$  et que ce groupe ne soit pas un tore.

Remarque: (i) Si la restriction de  $\psi_\sigma$  à  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  est triviale, alors  ${}^L M_\sigma = {}^L M$ . On peut donc choisir  $G_0 = G$ ,  $\sigma_0 = \sigma$  et la condition a) est trivialement vérifiée.

Il reste la condition b): celle-ci est motivée par le fait qu'une représentation réductible de  $M_\alpha$  paraboliquement induite par une représentation cuspidale non unitaire de  $M$  possède un unique sous-quotient de carré intégrable.

En effet, si  $i_{P \cap M_\alpha}^{M_\alpha}(\sigma \otimes \chi_{\lambda_\alpha})$  est réductible,  $\lambda > 0$ , cette représentation possède un unique sous-quotient de carré intégrable, et, notant  $\psi_\sigma$  le paramètre de Langlands de  $\sigma$ , il doit alors exister un homomorphisme admissible discret  $\psi : W_F \times \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M_\alpha$  tel que  $\psi|_{W_F} = \psi_\sigma|_{W_F}$  et que  $\psi\left(\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}\right) = \alpha(q)^\lambda$  (comparer avec

**5.3**). Ceci implique la propriété b).

Inversement, on déduit d'un homomorphisme admissible discret  $\psi : W_F \times \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M_\alpha$  dont la restriction à  $W_F$  est donnée par celle de  $\psi_\sigma$  une représentation de carré intégrable de  $M_\alpha$  qui doit être un sous-quotient de  $i_{P \cap M_\alpha}^{M_\alpha}(\sigma \otimes \chi_{\lambda_\alpha})$  pour un certain nombre réel  $\lambda > 0$  (comparer avec **5.4**).

(ii) Remarquons que, quitte à remplacer  $\psi_\sigma$  par un homomorphisme admissible qui lui est équivalent, on peut toujours trouver un sous-groupe de Levi minimal de  ${}^L M$  qui contient  $\psi_\sigma(W_F)$  et qui est semi-standard. Il est alors uniquement déterminé par  $\psi_\sigma$ , puisque l'intersection de deux sous-groupes de Levi semi-standard est contenu dans un sous-groupe de Levi semi-standard propre (de chacun des deux sous-groupes de Levi). Si  ${}^L M_\sigma$  est admissible pour  $G$ , on peut choisir  $G_0 = G$ . Si la restriction de  $\psi_\sigma$  sur  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  est non triviale, il est supposé qu'il existe une représentation de carré intégrable  $\pi_0$  de  $M$  correspondant au même paramètre  $\psi_\sigma$  et que celle-ci peut être obtenue à partir d'une représentation cuspidale  $\sigma_0$  de  $M_\sigma$  comme décrit ci-dessus. Comme  $\pi_0$  et  $\sigma$  correspondent au même paramètre  $\psi_\sigma$ , leurs fonctions  $\mu$  sont supposées être égales [S, paragraphe 9]. La condition b) s'explique alors comme dans (i).

(iii) En général, on peut toujours choisir pour  $G_0$  l'unique forme intérieure de  $G$  qui est quasi-déployée sur  $F$ : tout sous-groupe de Levi de  ${}^L G$  est admissible pour  $G_0$ . Par la correspondance de Langlands pour les formes intérieures (qui

n'est connue dans une certaine mesure que pour  $\underline{G}_0$  un groupe linéaire général), on associe à  $\sigma$  une représentation de carré intégrable  $\pi_0$  de  $M_0$ . Les fonctions  $\mu$  de  $\sigma$  et  $\pi_0$  devraient être égales [S, paragraphe 9]. En fait,  $\pi_0$  correspondrait au même paramètre  $\psi_\sigma$  (cette fois pris relatif au groupe  $M_0$ ). Les autres conditions s'expliquent comme dans (ii) (en partant de  $\pi_0$ ).

(iv) Il est possible que l'on puisse établir l'hypothèse ci-dessus dans une certaine mesure dans le cas où la localisation des points de réductibilité est connue (cf. [S]) ou la déduire d'autres propriétés conjecturales de ces points de réductibilité [M], [Z].

(v) On pourrait penser à renforcer la condition b) dans l'hypothèse (LM). Désignons pour un nombre complexe  $\lambda$  par  $\widehat{M}^{\sigma, \lambda\alpha}$  le centralisateur connexe de l'image de  $W_F$  par l'application  $W_F \rightarrow {}^L M_\alpha$ ,  $\gamma \mapsto \alpha(q)^{v_F(\gamma)\Im(\lambda)}\psi_\sigma(\gamma)$ . Si on remplace la dernière phrase dans la condition b) par "Pour que  $\lambda \mapsto \mu^{M_{\sigma, \alpha}}(\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda\alpha})$  ait un pôle en *un nombre complexe*  $\lambda$ , il faut et il suffit que  $\alpha(q)^{\Re(\lambda)}$  soit un élément  $q$ -distingué de  $\widehat{M}^{\sigma, \lambda\alpha}$  et que ce groupe ne soit pas un tore", alors l'hypothèse (LM) serait en quelque sorte invariante par torsion par un caractère non ramifié unitaire, i.e., si  $\sigma$  vérifie (LM), alors, pour tout  $\lambda$  dans  $a_M^*$ ,  $\sigma \otimes \chi_{\sqrt{-1}\lambda}$  vérifierait également (LM).

En effet, notant  $s_\lambda$  l'élément de  $T_{L_M}$  qui correspond à  $\lambda$  par la correspondance de Langlands pour les tores, on peut prendre comme paramètre de Langlands de  $\sigma \otimes \chi_{\sqrt{-1}\lambda}$  l'homomorphisme admissible  $\psi_{\sigma, \sqrt{-1}\lambda} : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M$ ,  $(\gamma, h) \mapsto (s_\lambda)^{\sqrt{-1}v_F(\gamma)}\psi(\gamma, h)$ . Il est immédiat qu'il a la propriété demandée. (Il faudrait éventuellement faire l'hypothèse supplémentaire que l'égalité  $\psi_{\sigma, \sqrt{-1}\lambda} = \psi_\sigma$  équivaut à dire que  $\sigma$  et  $\sigma \otimes \chi_{\sqrt{-1}\lambda}$  sont isomorphes. Ceci fait partie des conjectures de Langlands pour les représentations cuspidales.)

**4.4** Pour établir des résultats d'unicité nous aurons besoin de l'hypothèse suivante:

(LMU) Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux sous-groupes de Levi semi-standard de  $G$ . Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de  $M_1$  et de  $M_2$  respectivement qui vérifient (LM) et qui sont conjuguées par un élément de  $G$ , alors leurs paramètres de Langlands sont conjugués (à l'intérieur de  ${}^L G$ ) par un élément de  $\widehat{G}$ .

*Remarque:* Si on conjugue le paramètre de Langlands d'une représentation irréductible cuspidale unitaire  $\sigma$  de  $M$  à l'intérieur de  ${}^L G$  par un élément de  $\widehat{G}$ , on obtient un homomorphisme admissible relatif à un autre sous-groupe de Levi semi-standard  $M_1$  de  ${}^L G$ . Cet homomorphisme admissible devrait être le paramètre de Langlands d'une représentation irréductible cuspidale unitaire  $\sigma_1$  de  $M_1$ . Il résulte alors de l'invariance de la fonction  $\mu$  de Harish-Chandra par conjugaison (cf. [W]) que cette représentation cuspidale  $\sigma_1$  doit également vérifier l'hypothèse (LM).

**4.5** On suppose l'hypothèse  $(LM)$  et on garde les notations précédentes. On désignera par  $\widehat{T}_\sigma$  le tore maximal dans le centre de  ${}^L M_\sigma$ . Notons  $\Sigma_{\sigma_0}$  le sous-ensemble de  $\Sigma(A_{M_\sigma})$  formé des racines réduites  $\alpha$  tel que  $\mu^{M_{\sigma,\alpha}}(\sigma_0) = 0$ . Rappelons que c'est un système de racines [Si2, 3.5].

**Proposition:** *Le système de racines  $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$  de  $\widehat{M}^\sigma$  relatif à  $\widehat{T}_\sigma$  est isomorphe à  $\Sigma_{\sigma_0}^\vee$ , sauf éventuellement si  $\Sigma_{\sigma_0}$  possède des facteurs de type  $B_n$  ou  $C_n$ . Dans ce cas,  $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$  se décompose toujours en facteurs irréductibles selon la décomposition de  $\Sigma_{\sigma_0}$ , mais les facteurs irréductibles de  $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$  qui correspondent à des facteurs de type  $B_n$  ou  $C_n$  de  $\Sigma_{\sigma_0}$  peuvent aussi bien être de type  $B_n$  que  $C_n$ .*

*Preuve:* Les racines de  $\widehat{T}_\sigma$  dans l'algèbre de Lie de  $\widehat{M}^\sigma$  forment un sous-ensemble  $\Sigma'$  de  $\Sigma(\widehat{T}_\sigma) = \Sigma(A_{M_\sigma})^\vee$ . Par la condition b) de l'hypothèse  $(LM)$ , une racine  $\beta^\vee$  appartient à  $\Sigma'$ , si et seulement si  $\beta$  est le multiple d'une racine réduite  $\alpha$  dans  $\Sigma(A_{M_\sigma})$ , telle que  $\chi \mapsto \mu^{M_{\sigma,\alpha}}(\sigma_0 \otimes \chi)$  ait un pôle  $\chi_\lambda$  avec  $\lambda$  réel. Par les propriétés de la fonction  $\mu$  de Harish-Chandra (cf. **0.7**), ceci équivaut à dire que  $\mu^{M_{\sigma,\alpha}}(\sigma_0) = 0$ , i.e.  $\alpha \in \Sigma_{\sigma_0}$ .

Le système de racines  $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$  est donc formé de multiples de racines dans  $\Sigma_{\sigma_0}^\vee$ . En particulier,  $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$  se décompose en facteurs irréductibles selon la décomposition de  $\Sigma_{\sigma_0}$ . Par ailleurs, la classification des systèmes de racines irréductibles réduites [Bo] montre qu'un système de racines irréductibles, formé de multiples d'un autre système de racines irréductibles, ne peut en différer en type que si ce dernier système est de type  $B_n$  ou  $C_n$ . Et alors ce système de racines ne peut être que de type  $B_n$  ou  $C_n$ .  $\square$

**Corollaire:** *Pour que l'on ait l'égalité  $C(\widehat{M}^\sigma)^\circ = C({}^L G)^\circ$ , il faut et il suffit que le rang semi-simple de  $\widehat{M}^\sigma$  soit égal au rang parabolique de  ${}^L M_\sigma$ . Ce nombre est une borne maximale pour le rang semi-simple de  $\widehat{M}^\sigma$ .*

*Preuve:* On a  $C(\widehat{M}^\sigma)^\circ = (\bigcap_\alpha \ker \alpha)^\circ$ , où  $\alpha$  parcourt les racines de  $\widehat{M}^\sigma$  relatives à  $\widehat{T}_\sigma$ . Par la proposition ci-dessus et les faits résumés dans **1.4**, ce dernier groupe est égal à  $T_{L_G}$ , si et seulement si le rang de  $\Sigma_{\sigma_0}$  est égal à  $\text{rg}(\widehat{T}_\sigma) - \text{rg}(T_{L_G})$ . Ce nombre est la borne maximale pour le rang de  $\Sigma_{\sigma_0}$ . Ceci prouve le corollaire.  $\square$

**5.** Continuons à fixer jusqu'à la fin de **5.2** un sous-groupe parabolique standard  $P = MU$  de  $G$ . En outre fixons une représentation irréductible cuspidale unitaire  $(\sigma, E)$  de  $M$  vérifiant l'hypothèse  $(LM)$ . On notera  $\psi_\sigma : W_F \times \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M$  l'homomorphisme admissible associé à  $(\sigma, E)$ , et on garde les notations du paragraphe précédent relatives à  $\psi_\sigma$ . En particulier,  $\widehat{M}^\sigma$  désignera la composante neutre du centralisateur de  $\psi_\sigma(W_F)$  dans  ${}^L G$ , et  ${}^L M_\sigma$  le sous-groupe de Levi minimal de

${}^L M$  contenant  $\psi_\sigma(W_F)$  qui est semi-standard. En outre, pour  $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$ , on notera  $s_\lambda$  l'élément semi-simple de  $T_{L_M}$  qui lui correspond par la correspondance de Langlands pour les tores (cf. **1.8**).

**5.1** La propriété de  $\psi_\sigma$  dont on aura besoin pour prouver notre théorème principal est résumée dans le lemme ci-dessous. On la déduira de l'hypothèse (LM).

**Lemme:** *Soit  $\alpha$  une racine réduite dans  $\Sigma(P)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et posons  $s_{\sigma,\lambda\alpha} = s_\sigma \alpha(q)^\lambda$ . Notons  $\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee}$  la somme directe des algèbres de Lie des sous-groupes unipotents de  $\widehat{M}^\sigma$  associées à des poids de  $T_{L_M}$  égaux à un multiple non nul de  $\alpha^\vee$ . (Cet espace peut éventuellement être réduit à zéro.)*

*Considérons  $\text{Ad}(s_{\sigma,\lambda\alpha})$  comme un endomorphisme de  $\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee}$ . Alors, la différence des dimensions des espaces propres associés aux valeurs propres  $q$  et  $1$  de  $\text{Ad}(s_{\sigma,\lambda\alpha})$  (cette dimension étant égale à  $0$ , si  $q$  resp.  $1$  n'est pas une valeur propre) est égale à l'ordre du pôle de  $\mu^{M_\alpha}(\sigma \otimes \chi)$  en  $\chi = \chi_{\lambda\alpha}$ . Plus précisément, notant  $\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee,\lambda\alpha}(z)$  l'espace propre associé à une valeur propre  $z$  (et  $\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee,\lambda\alpha}(z) = 0$ , si  $z$  n'est pas une valeur propre), on a*

$$\dim(\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee,\lambda\alpha}(q)) - \dim(\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee,\lambda\alpha}(1)) = \begin{cases} -2, & \text{si } \mu^{M_\alpha}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha}) = 0 \\ 1, & \text{si } \sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha} \text{ est un pôle de } \mu^{M_\alpha} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Preuve:* Avec les notations de **4.3**, on déduit de l'hypothèse (LM) et de la formule du produit pour la fonction  $\mu$  de Harish-Chandra que

$$\begin{aligned} & \mu^{M_\alpha}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha}) \\ &= \mu^{M_{0,\alpha}}(\pi_0 \otimes \chi_{\lambda\alpha}) \\ &= (\mu^{M_{0,\alpha}} / \mu^{M_0})(\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda_\sigma} \otimes \chi_{\lambda\alpha}) \\ &= \prod_{\beta} \mu^{M_{\sigma,\beta}}(\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda_\sigma} \otimes \chi_{\lambda\alpha}), \end{aligned}$$

où  $\beta$  parcourt les racines réduites dans  $\Sigma(P_\sigma)$  de restriction à  $A_M$  égale à un multiple de  $\alpha$ .

Notons  $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$  le système de racines de  $\widehat{M}^\sigma$  relatif au tore maximal  $\widehat{T}_\sigma$  dans le centre de  $\widehat{M}_\sigma$ . La condition b) de l'hypothèse (LM) et les propositions **4.2** et **4.5** (y inclus la preuve de **4.5**) impliquent que  $\mu^{M_{\sigma,\beta}}(\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda_\sigma} \otimes \chi)$  a un pôle en  $\chi = \chi_{\lambda\alpha}$ , si et seulement si  $\beta \in \Sigma_{\sigma_0}$  et si toute racine  $\gamma$  dans  $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$  qui est un multiple de  $\beta^\vee$  vérifie  $\gamma(s_{\sigma,\lambda}) \in \{q^{-1}, q\}$ . Les pôles de  $\mu$  relatifs à une représentation cuspidale sont nécessairement d'ordre 1 (cf. **0.7**). Il résulte par ailleurs des propriétés de la fonction  $\mu$  que  $\mu^{M_{\sigma,\beta}}(\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda_\sigma} \otimes \chi_{\lambda\alpha}) = 0$ , si et seulement si  $\Re(\langle \beta^\vee, \lambda_\sigma + \lambda\alpha \rangle) = 0$  (ce qui équivaut à  $|\beta^\vee(s_{\sigma,\lambda\alpha})| = 1$ ), et si  $\mu^{M_{\sigma,\beta}}(\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda_\sigma} \otimes \chi)$  a un pôle en  $\chi = \chi_{\lambda\alpha + \lambda'\beta}$

pour un certain réel  $\lambda' > 0$ . Ceci équivaut par ce qui précédait à dire que  $\beta \in \Sigma_{\sigma_0}$  et que  $\gamma(s_{\sigma,\lambda}) = 1$  pour toute racine  $\gamma$  dans  $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$  qui est un multiple de  $\beta^\vee$ . Les zéros de la fonction  $\mu$  relatifs à une représentation cuspidale sont nécessairement d'ordre 2 (cf. **0.7**).  $\square$

**5.2 Proposition:** *Soit  $\lambda \in a_M^{G*}$ . Pour que  $\sigma \otimes \chi_\lambda$  soit un pôle de la fonction  $\mu$  de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de  $M$ , il faut et il suffit que le rang semi-simple de  $\widehat{M}^\sigma$  soit égal au rang parabolique de  ${}^L M_\sigma$  et que  $s_{\sigma,\lambda} = s_\sigma s_\lambda$  soit  $q$ -distingué dans  $\widehat{M}^\sigma$ .*

*Preuve:* Remarquons d'abord que le centralisateur connexe de  $\psi_\sigma(W_F)$  dans  ${}^L M$  est égal à  $(\widehat{M} \cap \widehat{M}^\sigma)^\circ$ . Par **4.2**, le tore maximal  $\widehat{T}_\sigma$  contenu dans le centre de  ${}^L M_\sigma$  est un tore maximal de  $\widehat{M}^\sigma$ .

Notons  $\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma, \pm}$  (resp.  $\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma \cap \widehat{M}, \pm}$ ) le sous-espace vectoriel de l'algèbre de Lie de  $\widehat{M}^\sigma$  (resp.  $(\widehat{M}^\sigma \cap \widehat{M})^\circ$ ) engendré par les éléments nilpotents. Considérons  $Ad(s_{\sigma,\lambda})$  comme endomorphisme de ces espaces vectoriels. Notons  $\mathfrak{u}(q)$  et  $\mathfrak{u}(1)$  respectivement les espaces propres associés aux valeurs propres  $q$  et 1 (ces espaces étant égaux à 0, si  $q$  resp. 1 n'est pas une valeur propre). Remarquons que  $s_{\sigma,\lambda}$  est  $q$ -distingué dans  $\widehat{M}^\sigma$ , si et seulement si  $\dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma, \pm}(q)) - \dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma, \pm}(1)) = \text{rg}_{ss}(\widehat{M}^\sigma)$ .

Tenant compte de l'inégalité  $\text{rg}_{ss}(\widehat{M}^\sigma) \leq \text{rg}_{ss}({}^L G) - \text{rg}_{ss}({}^L M_\sigma)$  (cf. **4.5**) et de la remarque dans **3.5**, tout revient à montrer que

$$(5-2-1) \quad \dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma, \pm}(q)) - \dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma, \pm}(1)) = \text{rg}_{ss}({}^L G) - \text{rg}_{ss}({}^L M_\sigma)$$

équivaut à

$$(5-2-2) \quad \text{ord}_{\sigma \otimes \chi_\lambda} \mu = \text{rg}_{ss}(G) - \text{rg}_{ss}(M).$$

Avec les notations de **5.1**, on a

$$(5-2-3) \quad \mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma, \pm} = \mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma \cap \widehat{M}, \pm} \oplus \bigoplus_{\alpha^\vee} \mathfrak{u}_{\pm\alpha},$$

où  $\alpha^\vee$  parcourt les racines réduites dans  $\Sigma(P)$ .

On déduit du lemme **5.1** et de la formule du produit pour la fonction  $\mu$  que

$$(5-2-4) \quad \sum_{\alpha^\vee} (\dim(\mathfrak{u}_{\pm\alpha}(q)) - \dim(\mathfrak{u}_{\pm\alpha}(1))) = \text{ord}_{\sigma \otimes \chi_\lambda} \mu.$$

Supposons d'abord  $\widehat{M}_\sigma = \widehat{M}$ , ce qui implique que le rang parabolique de  ${}^L M_\sigma$  est égal à celui de  $M$  (cf. **1.4**). On a  $\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma \cap \widehat{M}, \pm} = 0$ , et on déduit de (5-2-3) et (5-2-4) que

$$\dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma, \pm}(q)) - \dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma, \pm}(1)) = \text{ord}_{\sigma \otimes \chi_\lambda} \mu.$$

L'équivalence de (5-2-1) et de (5-2-2) est alors immédiate.

Supposons maintenant  $\widehat{M}_\sigma \neq \widehat{M}$ . Par l'hypothèse (LM), il existe une forme intérieure  $G_0$  de  $G$ , des sous-groupes de Levi semi-standard  $M_\sigma$  et  $M_0$  de  $G_0$ ,  $M_\sigma \subseteq M_0$ , tels que  $M_0$  et  $M_\sigma$  correspondent respectivement aux sous-groupes de Levi  ${}^L M$  et  ${}^L M_\sigma$  de  ${}^L G$ , ainsi qu'une représentation cuspidale  $\sigma_0$  de  $M_0$  et  $\lambda_\sigma \in a_{M_\sigma}^{M_0*}$ , tels que, identifiant  $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_0)$  et  $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$  par la correspondance de Langlands pour les tores, on ait  $(\mu/\mu^{M_0})(\sigma \otimes \chi_{\lambda_\sigma} \otimes \chi) = \mu(\sigma \otimes \chi)$  pour tout  $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ . Par ailleurs, fixant un sous-groupe parabolique  $P_\sigma$  de  $G_0$  de facteur de Levi  $M_\sigma$ ,  $i_{P_\sigma \cap M_0}^{M_0}(\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda_\sigma})$  possède un sous-quotient de carré intégrable et donc, par le résultat principal de [H2] rappelé en **0.7**,  $\mu^{M_0}$  a un pôle d'ordre  $\text{rg}_{ss}(M_0) - \text{rg}_{ss}(M_\sigma)$  en  $\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda_\sigma}$ . De plus, le paramètre de Langlands de  $\sigma_0$  est donné par l'homomorphisme admissible  $W_F \rightarrow {}^L M_\sigma$ ,  $\gamma \mapsto \psi_\sigma(\gamma, 1)$ , et il vérifie l'hypothèse (LM).

Le cas traité ci-dessus, appliqué à  $M_0$ ,  $\sigma_0$  et  $\lambda_\sigma$ , nous montre que

$$(5-2-5) \quad \dim(\mathbf{u}_{\widehat{M}^\sigma \cap M, \pm}(q)) - \dim(\mathbf{u}_{\widehat{M}^\sigma \cap M, \pm}(1)) = \text{rg}_{ss}({}^L M) - \text{rg}_{ss}({}^L M_\sigma).$$

En addition (5-2-5) et (5-2-4) et en utilisant (5-2-3), on trouve que le côté gauche de (5-2-1) vaut  $\text{rg}_{ss}({}^L M) - \text{rg}_{ss}({}^L M_\sigma) + \text{ord}_{\sigma \otimes \chi_\lambda} \mu$ . L'équivalence de (5-2-1) et de (5-2-2) est alors une conséquence de la proposition dans **1.4** et de l'égalité élémentaire

$$\text{rg}_{ss}({}^L G) - \text{rg}_{ss}({}^L M_\sigma) = (\text{rg}_{ss}({}^L G) - \text{rg}_{ss}({}^L M)) + (\text{rg}_{ss}({}^L M) - \text{rg}_{ss}({}^L M_\sigma))$$

□

**5.3** Soit  $\pi$  une représentation de carré intégrable de  $G$ . Il existe alors un sous-groupe parabolique semi-standard  $P = MU$  de  $G$ , une représentation irréductible cuspidale unitaire  $\sigma$  de  $M$  et  $\lambda \in a_M^*$ ,  $\lambda_G = 0$ , tel que  $\pi$  soit un sous-quotient de  $i_P^G(\sigma \otimes \chi_\lambda)$ . Par le résultat principal de [H2, 8.2] rappelé en **0.7**,  $\sigma \otimes \chi_\lambda$  est un pôle de la fonction  $\mu$  de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de  $M$ .

Supposons que  $\sigma$  vérifie l'hypothèse (LM). On sait donc lui associer un paramètre de Langlands  $\psi_\sigma : W_F \times \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M$  avec les propriétés énoncées dans (LM). Alors, par **5.2**, le rang semi-simple de  $\widehat{M}^\sigma$  est égal au rang parabolique de  ${}^L M_\sigma$ , et  $s_{\sigma, \lambda} := s_\sigma s_\lambda$  est un élément  $q$ -distingué du centralisateur connexe  $\widehat{M}^\sigma$  de  $\psi_\sigma(W_F)$  dans  ${}^L G$ . Il doit donc être contenu dans le groupe dérivé de  $\widehat{M}^\sigma$ . La partie compacte dans la décomposition polaire de  $s_{\sigma, \lambda}$  est triviale, puisque il en est ainsi pour  $s_\sigma$  et  $s_\lambda$ . Choisissons à l'aide de **3.6** un élément nilpotent  $N_{\sigma, \lambda}$  de l'algèbre de Lie de  $\widehat{M}^\sigma$  tel que  $(s_{\sigma, \lambda}, N_{\sigma, \lambda})$  soit une  $L^2$ -paire dans  $\widehat{M}^\sigma$ .

Comme remarqué dans **3.7**, on peut en déduire un homomorphisme admissible et discret  $\phi_{\sigma, \lambda} : \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \widehat{M}^\sigma$ , vérifiant  $\phi_{\sigma, \lambda} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \exp(N_{\sigma, \lambda})$  et  $\phi_{\sigma, \lambda} \left( \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix} \right) = s_{\sigma, \lambda}$ .

On pose

$$\psi_\pi(\gamma, h) = \psi_\sigma(\gamma, 1)\phi_{\sigma, \lambda}(h).$$

**Théorème:** *L'application  $\psi_\pi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$ ,  $(\gamma, h) \mapsto \psi_\pi(\gamma, h)$ , ci-dessus est bien définie. C'est un homomorphisme admissible et discret. Si on admet de plus l'hypothèse (LMU) de 4.4, alors  $\psi_\pi$  est, à conjugaison près, uniquement déterminé par  $\pi$ .*

*Preuve:* L'application  $\psi_\pi$  est évidemment bien définie. Montrons que son image n'est contenue dans aucun sous-groupe de Levi propre de  ${}^L G$ . Le centralisateur de l'image de  $\psi_\pi$  est égal à l'intersection du centralisateur de  $\psi_\sigma(W_F)$  et de celui de l'image de  $\phi_{\sigma, \lambda}$ . Par conséquent, tout tore de  ${}^L G$  qui centralise l'image de  $\psi_\pi$  doit être contenu dans  $\widehat{M}^\sigma$  et centraliser l'image de  $\phi_{\sigma, \lambda}$ . Or, comme remarqué ci-dessus,  $\phi_{\sigma, \lambda}$  est discret. Un tel tore doit donc être inclus dans le centre de  $\widehat{M}^\sigma$ . Mais, par le corollaire de 4.5, comme le rang semi-simple de  $\widehat{M}^\sigma$  est égal au rang parabolique de  ${}^L M_\sigma$ , ceci implique qu'il est inclus dans le centre de  ${}^L G$ . Il ne peut donc y avoir de sous-groupe de Levi propre de  ${}^L G$  qui contient l'image de  $\psi_\pi$ .

Ceci prouve que  $\psi_\pi$  est discret, et, en particulier, que la propriété (v) dans la définition 1.5 d'un homomorphisme admissible est vérifiée. Les autres propriétés de cette définition sont immédiates.

Quant à l'unicité, on sait par la théorie des représentations des groupes  $p$ -adiques que le triplet  $(\sigma, M, \lambda)$  est, à conjugaison par un élément de  $G$  près, uniquement déterminé par  $\pi$ . Soit  $(\sigma', M', \lambda')$  un autre triplet qui lui est conjugué par un élément de  $G$ . Alors le paramètre de Langlands  $\psi_{\sigma'}$  de  $\sigma'$  est par l'hypothèse (LMU) conjugué à  $\psi_\sigma$  par un élément de  $\widehat{G}$ . On peut modifier cet élément convenablement, pour qu'il conjugue également  $s_\lambda$  et  $s_{\lambda'}$  ainsi que  $\exp(N_{\sigma, \lambda})$  et  $\exp(N_{\sigma', \lambda'})$ , puisque ces éléments sont contenus dans le centralisateur de  $\psi_\sigma(W_F)$  et de  $\psi_{\sigma'}(W_F)$  respectivement. Il est alors immédiat que l'homomorphisme admissible discret que l'on déduit de  $(\sigma', M', \lambda')$  par le procédé ci-dessus est équivalent à  $\psi_\pi$ .  $\square$

**5.4** Pour montrer la réciproque de 5.3, i.e. que tout homomorphisme admissible discret provient d'une représentation de carré intégrable de  $G$  comme décrit dans 5.3, nous avons besoin de l'hypothèse supplémentaire suivante qui caractérise les homomorphismes admissibles correspondant à des  $L$ -paquets formés de représentations cuspidales. Cette hypothèse sera justifiée postérieurement (voir la remarque ci-dessous).

(LC) Soit  $M$  un sous-groupe de Levi semi-standard de  $G$  et soit  $\psi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M$  un homomorphisme admissible discret. Supposons que  ${}^L M$  soit un sous-groupe de Levi admissible minimal de  ${}^L G$  tel que  $\psi(W_F)$  soit contenu dans  ${}^L M$  et que  $\psi(1, \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix})$  soit un élément  $q$ -distingué du centralisateur connexe

de  $\psi(W_F)$  dans  ${}^L M$ .

Alors, il existe une représentation irréductible cuspidale unitaire  $\sigma$  de  $M$  telle que  $\psi$  soit le paramètre de Langlands de  $\sigma$  et que  $\sigma$  et  $\psi$  vérifient  $(LM)$  et  $(LMU)$ .

Nous avons alors

**Théorème:** *Supposons l'hypothèse  $(LC)$  vérifiée pour tout sous-groupe de Levi semi-standard de  $G$ . Alors, tout homomorphisme admissible discret  $\psi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  est équivalent à un homomorphisme admissible  $\psi_\pi$  pour une certaine représentation de carré intégrable  $\pi$  de  $G$ .*

*Preuve:* Comme  $\psi$  est discret,  $T_{L_G}$  doit être le tore maximal contenu dans le centre du centralisateur connexe  $\widehat{M}^\psi$  de  $\psi(W_F)$ . On déduit alors de 4.2 que le rang semi-simple de  $\widehat{M}^\psi$  est égal au rang parabolique d'un sous-groupe de Levi minimal  ${}^L M_\psi$  de  ${}^L G$  qui contient  $\psi(W_F)$ . Choisissons un sous-groupe de Levi admissible minimal  ${}^L M$  de  ${}^L G$  qui contient  $\psi(W_F)$  et qui est tel que  $s := \psi(1, \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix})$  soit un élément  $q$ -distingué du centralisateur connexe de  $\psi(W_F)$  dans  ${}^L M$ . (Si  ${}^L M_\psi$  est admissible, alors on peut évidemment poser  ${}^L M = {}^L M_\psi$ , tout élément d'un tore complexe étant trivialement  $q$ -distingué.)

Quitte à conjuguer  $\psi$ , on peut choisir  ${}^L M$  tel que  ${}^L M \supseteq {}^L M_\psi \supseteq {}^L T$  et que  $s$  soit contenu dans le tore maximal  $\widehat{T}_\psi$  contenu dans le centre de  ${}^L M_\psi$ . Notons  $M$  le sous-groupe de Levi semi-standard de  $G$  qui correspond à  ${}^L M$ . On a déjà remarqué que la partie compacte de  $s$  dans la décomposition polaire doit être triviale. On peut donc écrire  $s = s_M s^M$  avec  $s_M \in T_{L_M}$  et  $s^M \in \widehat{T}_\psi \cap \widehat{M}^{der}$  tel que  $\chi(s_M) = \chi(s)$  pour tout caractère algébrique  ${}^L M \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Par choix de  $M$ , l'élément  $s^M$  est  $q$ -distingué dans  $(\widehat{M}^\psi \cap {}^L M)^\circ$ . Le rang semi-simple de  $(\widehat{M}^\psi \cap {}^L M)^\circ$  est égal au rang parabolique de  ${}^L M_\sigma$  relatif à  ${}^L M$ , puisque  ${}^L M$  est semi-standard et que le rang semi-simple de  $\widehat{M}^\psi$  est égal au rang parabolique de  ${}^L M_\psi$  relatif à  ${}^L G$ . On conclut que  $s^M$  est contenu dans le groupe dérivé de  $\widehat{M}^\psi$ .

Comme dans 5.3 (sans détour par un élément  $\lambda$  de l'algèbre de Lie de  $T_{L_M}$ ), on en déduit un morphisme admissible discret  $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M$  qui, par l'hypothèse  $(LC)$ , est le paramètre de Langlands d'une représentation irréductible cuspidale unitaire  $\sigma$  de  $M$ . Notons ce morphisme admissible  $\psi_\sigma$ . En particulier, la restriction de  $\psi_\sigma$  à  $W_F$  est donnée par celle de  $\psi$ , et on a l'égalité  $\psi_\sigma(1, \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}) = s^M$ . Notons  $\lambda$  l'élément de  $a_M^*$  qui correspond à  $s_M$  par la correspondance de Langlands pour les tores.

Comme  $\sigma$  et  $\psi_\sigma$  vérifient par hypothèse l'hypothèse  $(LM)$  et que  $s$  est  $q$ -distingué dans  $\widehat{M}^\psi$ , on déduit de la proposition 5.2 que  $\sigma \otimes \chi_\lambda$  est un pôle de la fonction  $\mu$  de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de  $M$ . Il suit alors du résultat



principal de [H2] rappelé en **0.7** que  $i_P^G(\sigma \otimes \chi_\lambda)$  possède un sous-quotient de carré intégrable  $\pi$ . Quitte à choisir un élément nilpotent convenable dans la construction de  $\psi_\pi$  dans **5.3**, on obtient bien  $\psi = \psi_\pi$ .  $\square$

*Remarque:* (i) Le théorème justifie postérieurement l'hypothèse (LC): en effet, les homomorphismes admissibles discrets qui y sont caractérisés sont ceux qui ne peuvent pas correspondre à une représentation de carré intégrable obtenue par induction parabolique. Ces paramètres doivent donc correspondre à des représentations cuspidales.

Remarquons qu'il existe bien des cas où  $\psi(1, \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix})$  n'est pas  $q$ -distingué relatif au sous-groupe de Levi admissible minimal qui contient  $\psi(W_F)$  (par ex.  $\psi(W_F) = \{1\}$  et  $G$  un certain groupe non quasi-déployé de type  $B_n$ ).

(ii) Si on veut de plus que le  $L$ -paquet de  $\pi$  soit uniquement déterminé par  $\psi$ , il faut ajouter l'hypothèse suivante:

(LCU) (a) Soit  $\psi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M$  un homomorphisme admissible discret. Alors deux sous-groupes de Levi admissibles  ${}^L M_1$  et  ${}^L M_2$  de  ${}^L G$  qui sont minimaux pour la propriété qu'ils contiennent  $\psi(W_F)$  et que  $s_\psi := \psi(1, \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix})$  soit  $q$ -distingué dans le centralisateur connexe de  $\psi(W_F)$  dans  ${}^L M_1$  (resp.  ${}^L M_2$ ) sont conjugués par un élément de  $\widehat{G}$  qui centralise  $\psi(W_F)$  et  $s_\psi$ .

(b) Supposons que  $M$  et  $M'$  soient deux sous-groupes de Levi semi-standard de  $G$  et que  $\psi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M$ ,  $\psi' : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M'$  soient deux homomorphismes admissibles qui sont conjugués par un élément de  $\widehat{G}$ . Alors, si  $\psi$  est le paramètre de Langlands d'une représentation irréductible cuspidale unitaire  $\sigma$  de  $M$  et que les propriétés (LM) et (LMU) sont vérifiées, alors  $\psi'$  est le paramètre de Langlands d'une représentation irréductible cuspidale unitaire  $\sigma'$  de  $M'$  et  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont conjugués par un élément de  $G$ . En particulier, les propriétés (LM) et (LMU) sont vérifiées relatives à  $\sigma'$ .

La partie a) de l'hypothèse (LCU) devrait se laisser vérifier à la main (il faut comparer les diagrammes des paraboliques distingués avec ceux des systèmes de racines des groupe réductifs non quasi-déployés), mais nous avons effectué cette vérification seulement dans des cas particuliers, repoussant le cas général à un autre moment.

**5.5** Admettons toutes nos hypothèses ((LM), (LMU), (LC) et (LCU)(i),(ii)) et terminons en décrivant sommairement un procédé qui associe à tout homomorphisme admissible  $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  (le  $L$ -paquet d') une représentation irréductible lisse de  $G$ , ainsi qu'un procédé inverse associant à toute représentation

irréductible lisse de  $G$  un homomorphisme admissible  $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$ .

Notons  ${}^L M'$  un sous-groupe de Levi minimal de  ${}^L G$  contenant l'image de  $\psi$ . Il est uniquement déterminé à conjugaison près par un élément du centralisateur de  $\psi(W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$  (cf. [B, 3.6]). Quitte à remplacer  $\psi$  par un homomorphisme admissible qui lui est équivalent, on peut supposer  ${}^L M'$  semi-standard. L'homomorphisme  $\psi^{M'} : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M'$ , obtenu par restriction à droite de  $\psi$  se décompose en un produit  $\psi_{M',nr} \psi_{rc}^{M'}$ , où  $\psi_{rc}^{M'} : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M'$  est discret et où  $\psi_{M',nr} : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M'$  est trivial sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , non ramifié sur  $W_F$  et à image dans le groupe des éléments semi-simples hyperboliques de la composante neutre du centre de  ${}^L M'$  (ceci résulte de 4.1, en utilisant la décomposition polaire d'un élément semi-simple).

Par 5.4 et (LMU),  $\psi_{rc}^{M'}$  est égal à un homomorphisme  $\psi_{\tau_0}^{M'}$  associé à une représentation irréductible de carré intégrable  $\tau_0$  de  $M'$ .

Notons  $\lambda_{M'}$  un élément de  $a_{M'}^*$  tel que  $\chi_{\lambda_{M'}}$  corresponde à  $\psi_{M',nr}(Fr)$  par la correspondance de Langlands pour les tores et  $M''$  le sous-groupe de Levi semi-standard de  $G$  qui contient  $M'$  et qui est engendré par les racines  $\alpha$  dans  $\Sigma(A_{M'})$  qui vérifient  $\langle \alpha^\vee, \Re(\lambda_{M'}) \rangle = 0$ . Notons  $\lambda_{M'} = \lambda_{M'}^{M''} \oplus \lambda_{M''}$  la décomposition de  $\lambda_{M'}$  selon la décomposition  $a_{M'}^* = a_{M'}^{M''*} \oplus a_{M''}^*$ . Il existe un sous-groupe parabolique  $P''$  de  $G$  de facteur de Levi  $M''$  tel que  $\lambda_{M''} >_{P''} 0$ . Choisissons un sous-groupe parabolique  $P'$  de  $M''$  de facteur de Levi  $M'$ . La représentation induite  $i_{P'}^{M''} \tau_0$  est une somme directe de représentations tempérées. Choisissons-en une sous-représentation irréductible  $\tau$ .

On définit alors  $\pi_\psi$  comme étant la représentation irréductible lisse déduite de  $P'', \tau, \lambda_{M''}$  par la classification de Langlands. Le  $L$ -paquet de  $\pi_\psi$  est par construction uniquement déterminé par  $\psi$ .

Décrivons le procédé inverse de celui décrit ci-dessus, en admettant toutes nos hypothèses: soit  $\pi$  une représentation irréductible lisse de  $G$ . Par la classification de Langlands, celle-ci est associée à un sous-groupe parabolique semi-standard  $P'' = M''U''$  de  $G$ , une représentation tempérée  $\tau$  de  $M''$  et un élément  $\lambda_{M''}$  de  $a_{M''}^*$  qui est strictement positif dans la chambre de Weyl associée à  $P''$ . Ces données sont uniquement déterminées à conjugaison près. On peut trouver un sous-groupe parabolique semi-standard  $P' = M'U'$  de  $M''$  et une représentation de carré intégrable  $\tau_0$  de  $M'$  tels que  $\tau$  soit une sous-représentation de  $i_{P'}^{M''} \tau_0$ . Par 5.3, on déduit de  $\tau_0$  un homomorphisme admissible discret  $\psi_{\tau_0}^{M'} : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M'$ . Notons  $s_{M''}$  l'élément semi-simple dans  $C({}^L M'')^\circ$  qui correspond à  $\lambda_{M''}$  par la correspondance de Langlands pour les tores. Alors on définit  $\psi_\pi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  par  $(\gamma, h) \mapsto s_{M''}^{v_F(\gamma)} \psi_{\tau_0}^{M'}(\gamma, h)$ .

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des constructions:

**Théorème:** *Pour tout homomorphisme admissible  $\psi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$ ,*

$\psi_{\pi_\psi}$  est équivalent à  $\psi$ . Inversement, pour toute représentation irréductible lisse  $\pi$  de  $G$ ,  $\pi_{\psi_\pi}$  appartient au même  $L$ -paquet que  $\pi$ .  $\square$

## REFERENCES

- B. A. Borel, *Automorphic L-functions*; in Proc. of Symposia in Pure Mathematics (A. Borel et W. Casselman, eds.), vol. 33, part 2, Amer. Math. Soc., 1979, pp. 27–61.
- Bo. N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, ch. 4, 5 et 6*, Masson, Paris, 1981.
- BV. D. Barbash et D. Vogan, *Unipotent representations of complex semisimple groups*, Ann. Math. **121** (1985), 41–110.
- Ca. R.W. Carter, *Finite groups of Lie type*, John Wiley & Sons Ltd., 1983.
- CKPS. J.W. Cogdell, H.H. Kim, I.I. Piatetski-Shapiro et F. Shahidi, *Functoriality for the classical groups*, à paraître dans Publ. IHES.
- HT. M. Harris et R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties* Annals of Mathematics Studies, 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- H1. V. Heiermann, *Une caractérisation semi-simples des  $L^2$ -paires de Lusztig*, manuscrit (IAS Princeton, NJ, 1999).
- H2. V. Heiermann, *Décomposition spectrale d'un groupe réductif  $p$ -adique*, à paraître dans Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.
- JS. D. Jiang et D. Soudry, *The local converse theorem for  $SO(2n+1)$  and applications*, Ann. of Math. **157** (2003), 743–806.
- KL. D. Kazhdan et G. Lusztig, *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Invent. math. **87** (1987), 153–215.
- K. R. Kottwitz, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51** (1984), 611–650.
- L. R.P. Langlands, *Representations of abelian algebraic groups*, prépublication (1968), Yale University; publié dans *Olga Taussky-Todd: in memoriam. Special Issue*, Pacific J. Math. **277** (1997), 231–250.
- L1. G. Lusztig, *Some examples of square integrable representations of semi-simple  $p$ -adic groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 623–653.
- L2. G. Lusztig, *Classification of unipotent representations of simple  $p$ -adic groups*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. no. 11, 517–589.
- M. C. Moeglin, *Normalisation des opérateurs d'entrelacement et réductibilité des induites de cuspidales; le cas des groupes classiques  $p$ -adiques*, Ann. of Math. **151** (2000), 817–847.
- PY. G. Prasad et J.-K. Yu, *On finite group actions on reductive groups and buildings*, Invent. math. **147** (2002), 545–560.
- R. F. Rodier, *Représentations de  $GL(n, k)$  où  $k$  est un corps  $p$ -adique*. Astérisque **92-93** (1982), Soc. Math. France, Paris, pp. 201–218.
- S. F. Shahidi, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for  $p$ -adic groups*, Ann. Math. **132** (1990), 273–330.
- Si0. A. Silberger, *Introduction to harmonic analysis on reductive  $p$ -adic groups*, Mathematical Notes of Princeton University, no. 23, Princeton, NJ, 1979.
- Si1. A. Silberger, *Special representations of reductive  $p$ -adic groups are not integrable*, Ann. of Math. **111** (1980), 571–587.
- Si2. A. Silberger, *Discrete series and classification of  $p$ -adic groups I*, Am. J. Math. **103** (1981), 1241–1321.
- W. J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes  $p$ -adiques (d'après Harish-Chandra)*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 235–333.
- Z. Z. Zhang, *L-packets and reducibilities*, J. Reine Angew. Math. **510** (1999), 83–102.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK, HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN, UNTER DEN LINDEN 6,  
10099 BERLIN, ALLEMAGNE  
*E-mail address:* `heierman@mathematik.hu-berlin.de`